

**IDENTITÄTSAUSSAGEN BEI KANONISCHEN
HOMÖOMORPHISMEN AUF QUOTIENTENRÄUMEN
TOPOLOGISCHER GRUPPEN**

Dieter Werner

1981



Digitized by the Internet Archive
in 2026

https://archive.org/details/IA41548325_0044

IDENTITÄTSAUSSAGEN BEI KANONISCHEN HOMÖOMORPHISMEN
AUF QUOTIENTENRÄUMEN TOPOLOGISCHER GRUPPEN

Dissertation
zur Erlangung des akademischen Grades
eines Doktors der Naturwissenschaften
des Fachbereichs Mathematik
der Ludwig-Maximilians-Universität München

vorgelegt von
DIETER WERNER
aus Augsburg

eingereicht und angenommen am: 19. 12. 1980
in überarbeiteter Form veröffentlicht im: Juni 1982



1. Berichterstatter: Professor Dr. W. Roelcke
2. Berichterstatter: Professor Dr. V. Eberhardt

Tag der mündlichen Prüfung: 17. Juli 1981

INHALTSVERZEICHNIS

Einleitung	S. 4
§1. Grundsätzliche Begriffe und Zusammenhänge	S. 8
§2. Drei Beispiele	S. 21
§3. Lokal kompakte Gruppen	S. 29
§4. Unendlichdimensionale LIE-Gruppen	S. 48
§5. Ein weiteres (Gegen) Beispiel	S. 54
§6. Quotientenräume nach speziellen Untergruppen	S. 61
§7. Anhang	S. 76
Literaturverzeichnis	S. 82

EINLEITUNG

Im Zusammenhang mit der Untersuchung diskontinuierlicher Gruppen (siehe Literaturverzeichnis, (23)) wurde im Jahre 1960 von W. Roelcke in einem Schreiben an D. Montgomery folgende Frage gestellt:

Sei G eine lokal kompakte topologische Gruppe und H eine abgeschlossene Untergruppe von G , die keinen von $\{e\}$ verschiedenen Normalteiler von G enthält. Vermöge $aH \mapsto (ga)H$ für alle (F) $a, g \in G$ operiert dann G effektiv auf dem Quotientenraum G/H . Es werde nun G/H zusammenhängend vorausgesetzt. Gilt dann, daß jede Transformation $g \in G$, die eine nichtleere, offene Teilmenge von G/H punktweise festläßt, notwendig die Identität ist?

In seinem Antwortschreiben geht D. Montgomery von einem positiven Resultat für LIE-Gruppen G aus und skizziert einen Beweis für den Fall kompakter Gruppen G . Kernpunkt ist dabei, daß sich jede kompakte Gruppe als projektiver Limes von LIE-Gruppen darstellen läßt.

In der vorliegenden Arbeit werden die in diesem Briefwechsel offen gebliebenen Fragen beantwortet (siehe etwa Satz 3.3.2) und darüber hinaus ein allgemeinerer Ausgangspunkt gesetzt. Zentral ist dabei der Gedanke, eine Art Identitätssatz zu gewinnen:

Zwei Transformationen $g, h \in G$ von G/H lassen eine Menge $M \subset G/H$ bereits dann punktweise fest, wenn dies nur für eine gewisse Teilmenge $N \subset M$ gilt.

In der Arbeit wird untersucht, welche Forderungen hinsichtlich der algebraischen und topologischen Eigenschaften an G , H und N

zu stellen sind, damit M "groß", möglichst ganz G/H wird. Mit Ausnahme von §3. wird dabei vorausgesetzt, daß N^O , der offene Kern von N , nicht leer ist.

In §1. werden zunächst einige grundsätzliche Zusammenhänge entwickelt, dann wird die Fragestellung präzisiert. Besondere Bedeutung erlangt dabei der Normalisator $N(H)$ bzw. $N(x)$ der Untergruppe $H \subset G$ bzw. der Elemente $x \in H$ (siehe 1.3, 1.4, 1.10).

In §2. werden drei Beispiele vorgestellt. Das eine Beispiel zeigt eine Gruppe G mit folgender Eigenschaft:

Faktoriert man nach einer beliebigen Untergruppe H und läßt eine Transformation $g \in G$ irgendeine offene nichtleere Menge in G/H punktweise fest, so bleibt ganz G/H punktweise fest.

Das andere Beispiel, ein Gegenbeispiel im Sinne von 1.8.(b), ist eine Gruppe G mit einer ganzen Reihe von topologischen Eigenschaften, zu der es eine Untergruppe H und eine Transformation $k \in G$ gibt, so daß k zwar eine offene nichtleere Menge $N \subset G/H$ punktweise festläßt - die gesamte Fixpunktmenge aber relativ "klein" ist.

Das dritte Beispiel baut auf dem zweiten auf und zeigt, daß sich für G/H ein im Sinne von (F) positives, dagegen für G/H^- ein negatives Resultat ergeben kann. H^- soll dabei wie üblich die abgeschlossene Hülle von H in G bezeichnen.

In den Sätzen, besonders aber in den Beispielen und Gegenbeispielen (vgl. auch §5.) , weisen die auftretenden Gruppen ein recht weites Spektrum an algebraischen und topologischen Eigenschaften auf. Daran wird ziemlich deutlich, daß es wenig aussichtsreich erscheint,

Gruppen, für die sich im Sinne von (F) ein positives oder negatives Resultat ergibt, anhand solcher Eigenschaften charakterisieren zu wollen.

In §3. werden, ausgehend von LIE-Gruppen, lokal kompakte Gruppen G untersucht. Dabei wird nicht von offenen Mengen $N \subset G/H$ ausgegangen, sondern allgemeiner von Mengen N mit $\lambda_G(\tilde{\pi}_G^{-1}(N)) > 0$. Als Hauptergebnis wird gezeigt, daß zwei Transformationen von G/H bereits dann auf ganz G/H übereinstimmen, wenn das nur für N vorausgesetzt wird. π_G ist dabei die kanonische Abbildung von G auf G/H und λ_G ist ein linkes Haarsches Maß auf G (siehe Satz 3.3.2). Der Identitätssatz für analytische Abbildungen und seine in 3.1.6 formulierte Verallgemeinerung spielen dabei eine entscheidende Rolle.

In §4. werden unendlichdimensionale LIE-Gruppen G betrachtet (vgl. Anhang, Definition 3.1). Nach geeigneten rückführenden Maßnahmen gelingt es hier, den Identitätssatz für analytische Abbildungen anzuwenden und damit auch für diesen Fall die eingangs gestellte Frage (F) positiv zu beantworten (siehe Satz 4.3).

In §5. wird eine vollständige, metrisierbare Gruppe G als Gegenbeispiel angegeben. Das heißt G besitzt eine abgeschlossene Untergruppe H , die keinen von $\{e\}$ verschiedenen Normalteiler von G enthält und es gibt eine von der Identität verschiedene Transformation $g \in G$, die eine nichtleere offene Teilmenge von G/H punktweise festläßt. Damit wird (entgegen einer bis dahin möglichen Vermutung) gezeigt, daß die Eigenschaft "vollständig"

keine hinreichende Bedingung für ein im Sinne von (F) oder auch (1.1) positives Resultat sein kann.

In §6. werden schließlich Quotientenräume G/H nach speziellen Untergruppen H betrachtet. Dabei zeigt sich, daß es hauptsächlich auf die Struktur von H ankommt. Ist insbesondere $H \subset G$ eine endlichdimensionale LIE-Gruppe, G eine beliebige topologische Gruppe, und bestehen ansonsten die in (F) formulierten Voraussetzungen, so erhält man eine weitere positive Antwort (siehe Satz 6.1.6).

Im Anhang, in §7. , werden ohne Beweise die wichtigsten Definitionen und Sätze über unendlichdimensionale LIE-Gruppen im Sinne von K.H. Hofmann angegeben (vgl. Anhang 3.1).

Sofern nicht definiert oder allgemein üblich, entsprechen die Bezeichnungen denen in (9) oder (11). " $\complement$ " bezeichnet das Komplement der Menge A und "%" das Ende eines Beweises.

An dieser Stelle möchte ich auch Herrn Prof. Dr. W. Roelcke für manchen Ratschlag und etliche Ergänzungen, insbesondere in §1. , herzlich danken. Mein Dank gilt auch dem großen Verständnis, das er mir während der Entstehung dieser Arbeit entgegengebracht hat. Den Herren Dr. H. Pfister und Prof. Dr. V. Eberhardt, besonders aber Frau Dr. S. Dierolf danke ich für viele wertvolle Hinweise und Gespräche.

§1. Grundsätzliche Begriffe und Zusammenhänge

Sei G eine topologische Gruppe, H eine Untergruppe von G ; dann operiert G kanonisch auf dem Quotientenraum $G/H := \{aH \mid a \in G\}$. Mit e werde das neutrale Element von G , mit $\mathcal{U}_G$ der e -Umgebungsfilter von G und mit k_x der durch ein $x \in G$ bestimmte kanonische Homöomorphismus bezeichnet: $k_x: G/H \rightarrow G/H$, $k_x(aH) = xaH \cdot \pi_G$, bzw. nur π , falls kein Mißverständnis zu befürchten ist, soll die kanonische Abbildung von G auf G/H bezeichnen. $\text{Fix}(k_x) := \{aH \in G/H \mid k_x(aH) = aH\}$ ist die Fixpunktmenge von k_x in G/H und C_G bzw. C_H ist die Zusammenhangskomponente von G bzw. H . $\text{Fix}(k_x)$ ist abgeschlossen in G/H , falls H in G abgeschlossen ist.

Zur Abkürzung sei für $g, x \in G$, $A \subset G$ und $B \subset G/H$ definiert:
 $x_g := g^{-1}xg$, $A.B := \pi(A \cdot \pi^{-1}(B))$, $x.B := \pi(x \cdot \pi^{-1}(B))$

1.1 Frage:

Welche algebraischen und topologischen Eigenschaften von G und H bedingen, daß jeder kanonische Homöomorphismus k_x , der eine nichtleere, offene Teilmenge $\pi(M)$ von G/H punktweise festläßt, gleich ganz G/H punktweise festläßt?

Bemerkung:

Man könnte das Problem durchaus modifizieren oder auch allgemeiner formulieren (das geschieht in gewisser Weise in 1.7 und 1.8). Z.B. könnte man bei gegebenen Eigenschaften von G und H fragen: Wenn $M \subset G$ offen und nichtleer ist und $\pi_G(M) \subset \text{Fix}(k_x)$

gilt, wie sieht dann $\text{Fix}(k_x)$ aus?

Auch könnte man statt der Offenheit von M eine andere Eigenschaft untersuchen (das wird in §3. getan). Es zeigte sich aber, §3. ausgenommen, daß dadurch, sofern sich überhaupt Resultate ergaben, diese mit den im Sinne von 1.1 erzielten im Wesentlichen übereinstimmten- nur verloren etliche Aussagen an Übersichtlichkeit.

Nun einige elementare Beziehungen:

1.2 Lemma:

Für alle $M \subset G$ und alle $x \in G$ gelten:

- (a) $\pi(M) \subset \text{Fix}(k_x) \iff \bigwedge_{a \in M} x_a \in H \iff \bigwedge_{a \in G} (a^{-1}M) \subset \text{Fix}(k_{x_a})$
 (b) $\bigwedge_{a \in G} \text{Fix}(k_{x_a}) = a^{-1} \cdot \text{Fix}(k_x)$

Beweis: Das folgt direkt aus den Definitionen!

§
§

Danach gilt:

Für $a \in G$ enthält mit $\text{Fix}(k_x)$ auch $\text{Fix}(k_{x_a})$ eine nichtleere offene Menge. Ist $M \subset G$ offen und $\pi(M) \subset \text{Fix}(k_x)$, so ist für $a \in M$ die Menge $a^{-1}M$ eine e -Umgebung in G mit $\pi(a^{-1}M) \subset \text{Fix}(k_{x_a})$ und es ist $x_a \in H$. Außerdem folgt aus $\text{Fix}(k_{x_a}) = G/H$, daß auch $\text{Fix}(k_x) = G/H$. Aus diesem Grunde genügt es, sich in 1.1 auf die Untersuchung von nur solchen k_x zu beschränken, für die $x \in H$ ist und die das Bild $\pi(U)$ einer e -Umgebung $U \in \mathcal{U}_G$ punktweise festlassen.

Die Menge $\text{ID}_H := \{x \in H \mid \text{Fix}(k_x) = G/H\}$ ist der größte in H enthaltene Normalteiler von G , der abgeschlossen in G ist, falls H in G abgeschlossen ist (vgl. (20) S. 41). Falls $\text{ID}_H = \{e\}$, so

sagt man, G operiere effektiv auf G/H . Im Sinne von 1.1 ist nun zu untersuchen, unter welchen Voraussetzungen aus " $\pi(M) \subset \text{Fix}(k_x)$ " ($M \in \mathcal{U}_G$, $x \in H$) " $x \in \text{ID}_H$ " folgt. Da wegen 1.2 (a) $\text{ID}_H = H$, falls G abelsch oder H ein Normalteiler von G ist, sind diese Fälle uninteressant.

Im Folgenden erlangt der Begriff "Normalisator" Bedeutung:

$N(H) := \{x \in G \mid xH = Hx\}$ heißt Normalisator der Untergruppe $H \subset G$ und
 $N(x) := \{y \in G \mid xy = yx\}$ heißt Normalisator von $x \in G$.

$N(H)$ und $N(x)$ sind Untergruppen von G . $N(H)$ ist die größte Untergruppe von G in der H Normalteiler ist und ist abgeschlossen,

falls H in G abgeschlossen ist. Für hausdorffsche Gruppen G ist

$N(x)$ abgeschlossen. Wie man für $x \in G$ leicht bestätigt, ist

$\text{NI}(x) := \{y \in G \mid \bigvee_{a \in \text{ID}_H} yx = xya\}$ eine weitere Untergruppe von G , die $N(x)$ umfaßt und abgeschlossen ist, falls ID_H in G abgeschlossen ist.

Die folgenden beiden Lemmata stellen einen Zusammenhang zwischen

$N(H)$, $\text{NI}(x)$ und $\text{Fix}(k_x)$ her:

1.3 Lemma:

Für $x \in G$ und die Untergruppe $H \subset G$ gilt:

$$\tilde{\pi}^1(\text{Fix}(k_x)) = \text{NI}(x) \tilde{\pi}^1(\text{Fix}(k_x)) N(H)$$

Beweis: Zu zeigen ist nur mehr " $\supset$ ":

Sei dazu $y \in \text{NI}(x)$, $b \in \tilde{\pi}^1(\text{Fix}(k_x))$ und $c \in N(H)$. Es gibt ein

$a \in \text{ID}_H$ mit $xy = yxa$ und es gilt:

$$x(ybc)H \stackrel{c \in N(H)}{=} yxabHc \stackrel{a \in \text{ID}_H}{=} yxbHc \stackrel{b \in \tilde{\pi}^1(\text{Fix}(k_x))}{=} ybHc = ybCH \Rightarrow$$

$$\Rightarrow ybc \in \tilde{\pi}^1(\text{Fix}(k_x))$$

es ein $U \in \mathcal{U}_G$ gibt mit $\pi(U) \subset \text{Fix}(k_x)$.

1.5 Definition:

Sei G eine topologische Gruppe, $H \subset G$ eine Untergruppe und $U \in \mathcal{U}_G$:

$$(a) \quad I_H \mathcal{U}_G := \{x \in H \mid \bigvee_{U \in \mathcal{U}_G} \pi(U) \subset \text{Fix}(k_x)\}$$

$$(b) \quad H_U := \{x \in H \mid \pi(U) \subset \text{Fix}(k_x)\}$$

H_U ist eine Untergruppe von H , der Fixator von U im Sinne von (2) Chap.1 §5. N°2 Déf. 3. Unmittelbar ergeben sich die Beziehungen:

$$ID_H \subset H_U \subset I_H \mathcal{U}_G \quad \text{für alle } U \in \mathcal{U}_G$$

Da nach 1.2 (a) $H_U = \bigcap_{u \in U} uHu^{-1}$, ist H_U abgeschlossen in G , falls H abgeschlossen ist. Es gilt:

$$(\#) \quad I_H \mathcal{U}_G = \bigcup_{U \in \mathcal{U}_G} H_U$$

Da die Menge $\{H_U \mid U \in \mathcal{U}_G\}$ bezüglich der Inklusion gerichtet ist, folgt daß $I_H \mathcal{U}_G$ eine Untergruppe von H ist.

Es sei nun $a \in N(H)$ und $U, V \in \mathcal{U}_G$, so daß $U = aVa^{-1}$ (d.h. $aV=Ua$):

$$aH_V a^{-1} = \bigcap_{v \in V} avHv^{-1} a^{-1} = \bigcap_{u \in U} uaHa^{-1}u^{-1} = \bigcap_{u \in U} uHu^{-1} = H_U = H_a V a^{-1}$$

Beachtet man (#), so liefert $\bigcup_{U \in \mathcal{U}_G} H_U = \bigcup_{V \in \mathcal{U}_G} H_a V a^{-1} : a(I_H \mathcal{U}_G)a^{-1} = I_H \mathcal{U}_G$.

Also hat sich ergeben:

1.6 Lemma:

$I_H \mathcal{U}_G$ ist ein Normalteiler von $N(H)$ (und von H).

Einige weitere Definitionen:

1.7 Definition:

Sei G eine topologische Gruppe und $H \subset G$ eine Untergruppe von G :

$$(a) \quad \mathcal{U}_{\text{eff}} := \{(G, H) \mid ID_H = I_H \mathcal{U}_G\}$$

$$(b) \quad \mathcal{U}_{\text{oa}} := \{(G, H) \mid \bigwedge_{\substack{x \in I_H \mathcal{U}_G \\ M \subset G/H \\ H \in H}} M \subset \text{Fix}(k_x), \text{ } M \text{ offen-abgeschlossen in } G/H\}$$

Bemerkungen:

- 1) Falls G effektiv auf G/H operiert, also $ID_H = \{e\}$ ist, so gleicht für $(G,H) \in \mathcal{U}_{\text{eff}}$ die Operation von G auf G/H dem Begriff der "lokal effektiven" Operation, der in (23) S. 262 erklärt wird.
- 2) Wenn G/H zusammenhängend ist und $(G,H) \in \mathcal{U}_{\text{Oa}}$ gilt, so folgt $(G,H) \in \mathcal{U}_{\text{eff}}$ - man hat eine im Sinne von 1.1 positive Lösung.
- 3) Wenn G effektiv auf G/H operiert und G/H diskret ist, so gilt offenbar: $(G,H) \in \mathcal{U}_{\text{Oa}} - \mathcal{U}_{\text{eff}}$, falls $H \neq \{e\}$.

Bezüglich 1.7 läßt sich nun die in 1.1 gestellte Frage allgemeiner fassen:

- 1.8 (a) Welche algebraischen und topologischen Eigenschaften von $G, H \subset G$ und G/H sind hinreichend dafür, daß $(G,H) \in \mathcal{U}_{\text{eff}}$ bzw. $(G,H) \in \mathcal{U}_{\text{Oa}}$ gilt?
- (b) Es sind geeignete Gegenbeispiele zu finden, d.h. solche Gruppen G und H , daß $(G,H) \notin \mathcal{U}_{\text{Oa}}$ gilt.

Bemerkung: Es wäre sicher wünschenswert, in Ergänzung zu (a) notwendige Bedingungen zu finden, $\mathcal{U}_{\text{Oa}}$ bzw. $\mathcal{U}_{\text{eff}}$ also zu charakterisieren. Von relativ schwachen Aussagen abgesehen (vgl. 1.16), stößt man jedoch dabei von Anfang an auf erhebliche Schwierigkeiten:

Z.B. spielt in §3. und §4. die LIE-Gruppeneigenschaft, bzw. die Reduzierbarkeit auf LIE-Gruppen eine entscheidende Rolle. Andererseits weichen die Eigenschaften von Gruppen, für die sich auch positive Ergebnisse erreichen lassen, derart davon ab, daß sich hieraus wohl kaum eine notwendige Bedingung herausarbeiten

läßt (vgl. 1.9 , 1.17 , 1.18 , 1.19 , 2.1 , 2.3) .

Die Untersuchung von nicht lokal kompakten Nicht-LIE-Gruppen wird auch dadurch erschwert, daß im Gegensatz zu lokal kompakten Gruppen oder LIE-Gruppen, kaum Struktursätze zur Verfügung stehen. Auch an den Gegenbeispielen (vgl. 2.2 und §5.) scheint kein Ansatz erkennbar, der auf eine ein positives oder negatives Resultat charakterisierende Eigenschaft schließen ließe.

Aus diesen Gründen beschränkt sich diese Arbeit auf Untersuchungen im Sinne von 1.8 .

Der folgende Satz liefert ein positives Ergebnis, falls eine offene Untergruppe G' von G eine gewisse Bedingung erfüllt:

1.9 Satz:

Ist $G' \subset G$ eine offene Untergruppe und gilt $(G', G' \cap H) \in \mathcal{U}_{\text{eff}}$, so folgt $(G, H) \in \mathcal{U}_{\text{oa}}$.

Beweis: Sei $x \in I_H \mathcal{U}_G$ und $\pi(U) \subset \text{Fix}(k_x)$ für ein $U \in \mathcal{U}_G$.

Da G' offen in G ist, gibt es ein $U_1 \in \mathcal{U}_G$ mit $U_1 \subset G'$. Wählt man nun $V, W \in \mathcal{U}_G$ so, daß $W \subset V$, $x^{-1}W^{-1}x \subset V \subset V^2 \subset U \cap U_1$ gilt, so erhält man: $\bigwedge_{w \in W} x^{-1}x_w = x^{-1}W^{-1}xw \in V^2 \subset U_1 \subset G'$ und

$$\bigwedge_{v \in W} v^{-1}(x^{-1}x_w)v = x_v^{-1}x_{wv} \in H \quad , \quad \text{da } W^2 \subset V^2 \subset U \subset \text{Fix}(k_x) .$$

Das bedeutet: $\bigwedge_{w \in W} x^{-1}x_w \in I_{G' \cap H} \mathcal{U}_{G'} \stackrel{\text{ver.}}{=} \widetilde{\text{ID}}_{G' \cap H} := \{x \in G' \cap H \mid \bigwedge_{g \in G'} g^{-1}xg \in G' \cap H\}$.

$\Rightarrow \bigwedge_{g \in G'} g^{-1}x^{-1}x_{wg} = x_g^{-1}x_{wg} \in H$. Speziell für $g \in W \subset G'$ liefert das:

$$\bigwedge_{g \in W} x_g^{-1} \in H \quad , \quad \text{da } W \subset \text{Fix}(k_x) \quad , \quad \text{somit auch } \bigwedge_{g, w \in W} x_{wg} \in H \quad , \quad \text{also}$$

$\pi(W^2) \subset \text{Fix}(k_x)$ nach 1.2 (a) .

Man zeigt leicht mit vollständiger Induktion: $\bigwedge_{n \in \mathbb{N}} \pi(W^n) \subset \text{Fix}(k_x)$.

Wählt man W symmetrisch, so ist $G^* := \bigcup_{n \in \mathbb{N}} W^n$ eine offene Unter-

gruppe von G ; daher ist $G*H$ offen-abgeschlossen in G und gesättigt mod H . Die Menge $\pi(G*H)$ ist dann eine offen-abgeschlossene Teilmenge von G/H , die H enthält. Damit ist alles gezeigt. $\S$

Mit Hilfe von 1.3 erhält man:

1.10 Lemma:

- (a) $\bigwedge_{x \in I_H \mathcal{U}_G} NI(x)$ oder $N(H)$ ist offen in $G \Rightarrow (G,H) \in \mathcal{U}_{oa}$
 (b) $(\bigwedge_{x \in I_H \mathcal{U}_G} NI(x) \wedge \pi^{-1}(Fix(k_x))N(H) \text{ ist offen })$ und H ist abgeschlossen in $G \Rightarrow (G,H) \in \mathcal{U}_{oa}$

Beweis: Sei $x \in I_H \mathcal{U}_G$: Stets gilt natürlich $H \in Fix(k_x)$.

(a) $Fix(k_x)$ enthält dann eine gleichmäßige Umgebung von sich selbst bezüglich der Rechts-oder Linksuniformität von G/H , ist also offen-abgeschlossen in G/H .

(b) $M := Fix(k_x)$ ist nach 1.3 offen und auch abgeschlossen, weil H abgeschlossen ist. $\S$

Bemerkung: Nimmt man in 1.10 als Grundvoraussetzung " G/H zusammenhängend" , so erhält man in beiden Fällen " $(G,H) \in \mathcal{U}_{eff}$ ".

Operiert G im Falle (a) darüber hinaus noch effektiv auf G/H , so erhält man die Äquivalenzaussage:

$$\bigwedge_{x \in I_H \mathcal{U}_G} N(x) \text{ ist offen in } G \Leftrightarrow (G,H) \in \mathcal{U}_{eff} .$$

Der folgende Satz ist eine Variante in der Anwendung von 1.3:

1.11 Satz:

Ist $H \subset G$ abgeschlossen und gilt: $\bigwedge_{\substack{x \in I_H \mathcal{U}_G \\ U \in \mathcal{U}_G}} NI(x)UN(H)$ ist dicht in G , so folgt $(G,H) \in \mathcal{U}_{eff}$.

Beweis: $\bigwedge_{x \in I_H \mathcal{U}_G} \pi^{-1}(Fix(k_x)) \in \mathcal{U}_G \xrightarrow[\text{Ver.}]{1.3} \bigwedge_{x \in I_H \mathcal{U}_G} \pi^{-1}(Fix(k_x))$ ist dicht in G .

Da wegen der Abgeschlossenheit von H auch $\overline{\pi}^A(\text{Fix}(k_x))$ abgeschlossen in G ist, folgt $\overline{\pi}^A(\text{Fix}(k_x)) = G$ und somit $\bigwedge_{x \in \mathbb{Z}_H \mathcal{U}_G} x \in \text{ID}_H$. §

Ein Beispiel soll 1.11 konkretisieren:

1.12 Beispiel:

Versieht man $G := \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \mid a, b \in \mathbb{R} \text{ und } a \neq 0 \right\}$ mit der üblichen

Topologie und der Matrizenmultiplikation als Verknüpfung, so ist G eine topologische Gruppe und $H := \left\{ \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \mid a \in \mathbb{R}, a \neq 0 \right\}$ eine abgeschlossene Untergruppe von G . Da H abelsch ist, folgt

$\bigwedge_{x \in H} H \subset N(x)$. Stets gilt $H \subset N(H)$ und weil, wie man leicht feststellt, $\bigwedge_{U \in \mathcal{U}_G} HUH = G$, folgt $(G, H) \in \mathcal{U}_{\text{eff}}$ aus 1.10 (b).

Es sollen nun einige recht nützliche Aussagen über $I_H \mathcal{U}_G$ gemacht werden:

1.13 Lemma:

Gibt es zu jedem $x \in I_H \mathcal{U}_G$ ein $V \in \mathcal{U}_G$ mit $\{x^{-1}x_V \mid v \in V\} \cap I_H \mathcal{U}_G \subset \text{ID}_H$, so folgt $(G, H) \in \mathcal{U}_{\text{Oa}}$.

Beweis: Sei $x \in I_H \mathcal{U}_G$ und $W \in \mathcal{U}_G$ mit $W^2 \subset V \cap \text{Fix}(k_x)$.

Nach 1.2 (a) gilt: $\bigwedge_{w \in W} \pi(w) \subset \text{Fix}(k_{x_W})$. Da $\bigwedge_{w \in W} x_W \in H$, folgt

$\bigwedge_{w \in W} x_W \in I_H \mathcal{U}_G$. Weil mit x auch x^{-1} zu $I_H \mathcal{U}_G$ gehört, ergibt sich: $\{x^{-1}x_W \mid w \in W\} \subset \{x^{-1}x_V \mid v \in V\} \cap I_H \mathcal{U}_G \subset \text{ID}_H$. Aus der Definition von $\text{NI}(x)$ entnimmt man direkt: $W \subset \text{NI}(x)$.

Also ist $\text{NI}(x)$ offen für alle $x \in I_H \mathcal{U}_G$ und mit 1.10 (a) ist man fertig. §

Wenn $I_H \mathcal{U}_G$ diskret ist, so ist die Voraussetzung in 1.13 für hin-

reichend kleines $V \in \mathcal{V}_G$ erfüllt und man erhält:

1.14 Korollar:

Ist $I_H \mathcal{V}_G$ diskret, so gilt $(G, H) \in \mathcal{V}_{0a}$.

1.15 Lemma:

Ist $I_H \mathcal{V}_G$ abgeschlossen in G , so folgt $(G, H) \in \mathcal{V}_{0a}$.

Beweis: Sei $x \in I_H \mathcal{V}_G$ und $aH \in (\text{Fix}(k_x)^\circ)^-$ (das ist die abgeschlossene Hülle von $\text{Fix}(k_x)^\circ$ in G/H). Dann gibt es zu jedem $U \in \mathcal{V}_G$ ein $v_U \in U$ und ein $V_U \in \mathcal{V}_G$, so daß $\pi(av_U V_U) \in \text{Fix}(k_x)$. Aus 1.2 (a) folgt $\pi(V_U) \in \text{Fix}(k_{x_{av_U}})$, woraus sich gemäß 1.5 (a) $x_{av_U} \in I_H \mathcal{V}_G$ ergibt. Das Netz $(x_{av_U})_{U \in \mathcal{V}_G}$ konvergiert offenbar gegen x_a , also gilt $x_a \in I_H \mathcal{V}_G$ mit der Voraussetzung. Es gibt somit ein $W \in \mathcal{V}_G$ mit $\pi(W) \in \text{Fix}(k_{x_a})$, was mit 1.2 (a) $\pi(aW) \in \text{Fix}(k_x)$ liefert. Damit ist $aH \in \text{Fix}(k_x)^\circ$ und weil dies für alle $aH \in (\text{Fix}(k_x)^\circ)^-$ und alle $x \in I_H \mathcal{V}_G$ gilt, ist alles gezeigt.

§

Unter zusätzlichen Voraussetzungen erhält man eine Aussage über $\mathcal{V}_{\text{eff}}$:

1.16 Korollar:

Ist ID_H abgeschlossen in G und G/H zusammenhängend, so gilt:

$(G, H) \in \mathcal{V}_{\text{eff}} \iff I_H \mathcal{V}_G$ ist abgeschlossen in G .

Als positives Ergebnis soll nun formuliert werden:

1.17 Satz:

Es folgt $(G, H) \in \mathcal{V}_{0a}$, falls eine der folgenden Bedingungen erfüllt ist:

(a) Jeder in H enthaltene Normalteiler von $N(H)$ ist abgeschlossen in G .

(b) H ist eine einfache Gruppe und ist abgeschlossen in G .

Beweis: (a) Direkt aus 1.6 und 1.15 !

(b) Da in diesem Fall $I_H \mathcal{U}_G = \{e\}$ oder $I_H \mathcal{U}_G = H$, ist dies eine Folgerung aus der Definition von $\mathcal{U}_{\text{oa}}$ (es gilt dann sogar $(G, H) \in \mathcal{U}_{\text{eff}}$) oder aus 1.15. $\square$

In 1.13 war die Menge $\{x^{-1}x_v | v \in V\} = \{x^{-1}v^{-1}xv | v \in V\}$, eine Menge von Kommutatoren von G , von Bedeutung. Im Folgenden werden unter Verwendung von 1.10 und 1.13 einige Aussagen im Zusammenhang mit der von allen Kommutatoren erzeugten Untergruppe, der Kommutatorgruppe $K(G)$ von G gemacht:

1.18 Satz:

Es folgt $(G, H) \in \mathcal{U}_{\text{oa}}$, falls eine der folgenden Bedingungen erfüllt ist:

- (a) Es gibt ein $U \in \mathcal{U}_G$, so daß $U \cap K(G) \cap I_H \mathcal{U}_G \subset \text{ID}_H$.
- (b) Für jedes $V \in \mathcal{U}_G$ ist die von der Zusammenhangskomponente C_V (von e in V) erzeugte Untergruppe offen in G und die Zusammenhangskomponente C' von $I_{K(G) \cap H} \mathcal{U}_{K(G)}$ ist in ID_H enthalten.

Beweis: (a) Sei $x \in I_H \mathcal{U}_G$ und $V, W \in \mathcal{U}_G$ so, daß $V \subset W$, $W^2 \subset U$ und $x^{-1}V^{-1}x \subset W$; dann gilt:

$\{x^{-1}x_v | v \in V\} \cap I_H \mathcal{U}_G \subset U \cap K(G) \cap I_H \mathcal{U}_G \subset \text{ID}_H$ und mit 1.13 ist man fertig.

(b) Man wählt zu $x \in I_H \mathcal{U}_G$ ein $V \in \mathcal{U}_G$ mit $\pi(V^2) \subset \text{Fix}(k_x)$. Nach 1.2 (a) gilt: $\bigwedge_{v \in V} \pi(V) \subset \text{Fix}(k_{x_v})$ und da $\pi(V) \subset \text{Fix}(k_{x^{-1}})$ folgt

$\bigwedge_{v \in V} \pi(V) \subset \text{Fix}(k_{x^{-1}x_v})$. Das bedeutet: $\{x^{-1}x_v | v \in V\} \subset I_H \mathcal{U}_G \cap K(G)$. $K(G)$ ist Normalteiler von G , somit gilt $\bigwedge_{w \in V} w^{-1} \{x^{-1}x_v | v \in V\} w \subset K(G)$ und weil $\pi(V^2) \subset \text{Fix}(k_x)$ folgt noch:

$\bigwedge_{w \in V} w^{-1} \{x^{-1}x_v | v \in V\} w \in K(G) \cap H$. Da dies insbesondere für alle $w \in V \cap K(G)$ gilt, hat man $\{x^{-1}x_v | v \in V\} \in I_{K(G) \cap H} \mathcal{U}_{K(G)}$ (#)

Betrachtet man nun $v \in C_V \subset V$, so ist $\{x^{-1}x_v | v \in C_V\}$ das Bild von C_V bezüglich der stetigen Abbildung $f_x: G \rightarrow G, g \mapsto x^{-1}x_g$. Da $e \in f_x(C_V)$, ist mit (#) $f_x(C_V) = \{x^{-1}x_v | v \in C_V\} \in C'$, nach Voraussetzung also $\{x^{-1}x_v | v \in C_V\} \in ID_H$. Der Definition von $NI(x)$ entnimmt man dann: $C_V \subset NI(x)$. Also folgt nach Voraussetzung $NI(x)$ offen und weil das für alle $x \in I_H \mathcal{U}_G$ gilt, vollendet 1.10 (a) den Beweis.

§

Bemerkungen:

- 1) Wie man durch Variation des Beweises von (b) leicht bestätigt (V so, daß $\pi(V^3) \in \text{Fix}(k_x)$), könnte man in (b) $I_{K(G) \cap H} \mathcal{U}_{K(G)}$ durch $I_{K(G) \cap I_H \mathcal{U}_G} \mathcal{U}_{K(G)}$ ersetzen und damit die Voraussetzung abschwächen.
- 2) 1.18 ist (in Erweiterung von 1.14) insbesondere bei folgenden Sonderfällen anwendbar:
 - $K(G)$ oder $K(G) \cap H$ oder $K(G) \cap I_H \mathcal{U}_G$ ist diskret (1.18 (a))
 - G ist lokal zusammenhängend und H oder $K(G) \cap H$ ist total unzusammenhängend (1.18 (b))

Der folgende Satz zeigt die Zugehörigkeit von (G, H) zu $\mathcal{U}_{\text{oa}}$, falls $(K(G), K(G) \cap H)$ in $\mathcal{U}_{\text{eff}}$ liegt:

1.19 Satz:

Ist $(K(G), K(G) \cap H) \in \mathcal{U}_{\text{eff}}$ und operiert $K(G)$ effektiv auf $K(G) \cap H$, so folgt $(G, H) \in \mathcal{U}_{\text{oa}}$.

Beweis: Sei $x \in I_H \mathcal{U}_G$ und $V \in \mathcal{U}_G$ derart, daß $\pi(V) \in \text{Fix}(k_x)$.

Völlig analog wie in der Herleitung von (#) im Beweis von 1.18 (b)

erhält man: $\{x^{-1}x_v | v \in V\} \subset I_{K(G) \cap H} \mathcal{U}_{K(G)}$. Die Voraussetzung liefert $\{x^{-1}x_v | v \in V\} = \{e\}$, also $V \subset N(x)$. 1.10 (a) vollendet den Beweis.

§

Nun sollen noch einige Bemerkungen zur Abgeschlossenheit von H in G gemacht werden:

Für $x, a \in G$ gilt stets: $xaH = aH \Rightarrow xaH^- = aH^-$ und somit folgt $\text{Fix}(k_x^H) \subset \text{Fix}(k_x^{H^-})$, $I_H \mathcal{U}_G \subset I_{H^-} \mathcal{U}_G$ und $ID_H \subset ID_{H^-}$ (#)
 k_x^H bzw. $k_x^{H^-}$ sind die kanonischen Homöomorphismen von G/H bzw. G/H^- . Ist nun $H \subset G$ nicht abgeschlossen, so könnten in (#) echte Teilmengenbeziehungen bestehen. Im Allgemeinen lassen sich daher Folgerungen wie etwa " $(G, H) \in \mathcal{U}_{\text{eff}} \Rightarrow (G, H^-) \in \mathcal{U}_{\text{eff}}$ " oder umgekehrt oder mit " $\not\subset$ " anstelle von " $\subset$ " nicht ziehen.

Setzt man aber voraus, daß G effektiv auf G/H^- operiert, so liegt mit (G, H^-) auch (G, H) in $\mathcal{U}_{\text{eff}}$, weil dann gilt:

$$I_H \mathcal{U}_G \subset I_{H^-} \mathcal{U}_G \subset ID_{H^-} = \{e\}.$$

Wie das Beispiel 2.3 im nächsten Paragraphen zeigt, kann es dagegen vorkommen, daß zwar (G, H) , aber nicht (G, H^-) in $\mathcal{U}_{\text{eff}}$ enthalten ist.

Ist H abgeschlossen in G , so hat dies zur Folge, daß G/H hausdorffsch ist und daß die Mengen $\text{Fix}(k_x)$ und ID_H abgeschlossen sind. Das wird in §3. eine gewisse Rolle spielen.

§2. Drei Beispiele

In allen Fällen, wo sich bisher ein positives Ergebnis erzielen ließ, wurden besondere Anforderungen an die Untergruppe H gestellt. Jetzt wird ein konkretes Beispiel einer Klasse von Gruppen angegeben, bei denen es überhaupt nicht auf die Eigenschaften von H ankommt.

2.1 Beispiel:

Im Folgenden sei $(X, \circ)$ eine topologische Gruppe.

Eine Abbildung $f: [0,1) \rightarrow X$ heißt stückweise konstant, wenn es eine endliche Folge $a_0, \dots, a_n$ in $[0,1]$ gibt, so daß

$0 = a_0 < a_1 < \dots < a_n = 1$ und $f|_{[a_i, a_{i+1})}$ konstant ist.

$a_0, \dots, a_n$ heißt dabei eine zu f gehörende Zerlegung. G sei die Menge all dieser Abbildungen. Zusammen mit der punktweisen Verknüpfung $(f \cdot g)(u) := f(u) \circ g(u)$, $u \in [0,1)$ bildet G eine Gruppe.

Nun wird durch Angabe einer Umgebungsbasis für das neutrale Element von G eine Gruppentopologie auf G definiert:

Für $\varepsilon > 0$ und $U \in \mathcal{U}_X$ soll sein: $N(U, \varepsilon) := \{f \in G \mid \lambda(f^{-1}(U)) > 1 - \varepsilon\}$

Dabei ist λ das übliche Lebesgue-Borelsche Maß auf $[0,1)$.

Man überzeugt sich leicht durch Nachrechnen, daß die für eine Gruppentopologie bestehenden Forderungen erfüllt sind (dies wird in (8) Theorem (1.1) gezeigt). Im Weiteren soll G mit dieser Topologie versehen sein. G hat etliche interessante Eigenschaften, von denen einige im Folgenden dargestellt werden sollen (vgl. auch (8)):

Es übertragen sich einige Eigenschaften von X auf G , z.B.:

- (1) Die Metrisierbarkeit und die Eigenschaft SIN (small invariant neighborhoods), die folgendes besagt:

$$\bigwedge_{U \in \mathcal{U}_G} \bigvee_{V \in \mathcal{U}_G} (V \subset U \text{ und } \bigwedge_{x \in G} x^{-1}Vx = V)$$

Das ist eine direkte Folgerung aus der Definition der $N(U, \varepsilon)$.

- (2) Die Separabilität: Sei A eine abzählbare Teilmenge, die dicht in X liegt; dann ist die Menge aller $f \in G$ mit Werten in A und mit einer Zerlegung, die nur aus rationalen Punkten besteht, eine abzählbare dichte Teilmenge von G .

Dagegen gilt unabhängig von den zusätzlichen topologischen Eigenschaften von X :

- (3) G ist nicht bairesch: $G_n := \{f \in G \mid f|_{[0, 1/n)} \text{ ist konstant}\}$ ist für jedes $n \in \mathbb{N}$ eine abgeschlossene, aber nicht offene Untergruppe von G und es gilt: $\bigcup_{n \in \mathbb{N}} G_n = G$. Damit ist G natürlich auch nicht lokal kompakt und nicht vollständig metrisierbar.

- (4) G ist nicht vollständig: Sei $x \in X$ und $x \neq e$; dann läßt sich eine Folge (f_n) in G so definieren:

$$f_n(u) := \begin{cases} x, & \text{für } u \in \bigcup_{k=0}^n [\frac{1}{2^{k+1}}, \frac{1}{2^k}) \\ e & \text{sonst} \end{cases} \quad n \in \mathbb{N}$$

Man sieht leicht, daß der durch (f_n) bestimmte Elementarfilter ein Links- und auch ein Rechts-Cauchyfilter in G ist, der jedoch keinen Limes in G hat.

- (5) X kann als Untergruppe von G aufgefaßt werden: Definiert man $X_G := \{f \in G \mid f \text{ ist konstant}\}$, so sind X und X_G offenbar topologisch isomorph (vgl. (8), Theorem (1.1)).

Da die folgende Eigenschaft von G nicht so leicht einzusehen ist,

soll diese in einem Lemma bewiesen werden:

2.1.1 Lemma:

G ist bogenweise und lokal bogenweise zusammenhängend.

Beweis: Man definiert eine stetige Abbildung $w: [0,1] \rightarrow G$ auf folgende Weise:

Seien $f, g \in G$ und $\{c_0, \dots, c_n\}$ eine Zerlegung von $[0,1]$, so daß f und g beide auf jedem $[c_i, c_{i+1})$ konstant sind. (Man wählt dazu eine Verfeinerung von zu f und g gehörenden Zerlegungen).

Für $s \in (0,1)$ sei $s_i := sc_i + (1-s)c_{i+1}$. Man zerlegt nun $[0,1]$ in zwei disjunkte Teilmengen M_s und N_s :

$$M_s := \bigcup_{i=0}^{n-1} [c_i, s_i) \quad \text{und} \quad N_s := \bigcup_{i=0}^{n-1} [s_i, c_{i+1}) . \text{ Ferner seien } M_0 := [0,1) , \\ M_1 := \emptyset , N_0 := \emptyset \text{ und } N_1 := [0,1) . \text{ Dann definiert man } \bigwedge_{s \in [0,1]} w_s := w(s) : \\ w_0 := f , w_1 := g \text{ und } w_s(u) := \begin{cases} f(u) & \text{für } u \in M_s \\ g(u) & \text{für } u \in N_s \end{cases} \quad \text{für } s \in (0,1)$$

Da für $s, t \in [0,1]$ $w_s(u)w_t^{-1}(u) = e$ für alle $u \in (M_s \cap M_t) \cup (N_s \cap N_t)$, ist unmittelbar ersichtlich, daß $\lambda((M_s \cap M_t) \cup (N_s \cap N_t)) \rightarrow 1$, falls $|s-t| \rightarrow 0$. Damit ist die Stetigkeit von w bewiesen.

Nun soll noch gezeigt werden, daß gilt: $f, g \in N(U, \varepsilon) \Rightarrow$

$$\bigwedge_{s \in [0,1]} w_s \in N(U, \varepsilon) . \text{ Dazu muß sein: } \bigwedge_{s \in [0,1]} \lambda(w_s^{-1}(U)) > 1 - \varepsilon .$$

$w_s^{-1}(U)$ läßt sich folgendermaßen darstellen:

$$w_s^{-1}(U) = (M_s - (Cf(U) \cap M_s)) \cup (N_s - (Cg^{-1}(U) \cap N_s)) . \text{ Wie man sich leicht } \\ \text{überzeugt, gilt außerdem: } \lambda(Cf(U) \cap M_s) = (1-s)\lambda(Cf(U)) \text{ und} \\ \lambda(Cg^{-1}(U) \cap N_s) = s\lambda(Cg^{-1}(U)) . \text{ Da die obige Vereinigung disjunkt} \\ \text{ist, erhält man:}$$

$$\lambda(w_s^{-1}(U)) = \lambda(M_s) - \lambda(Cf(U) \cap M_s) + \lambda(N_s) - \lambda(Cg^{-1}(U) \cap N_s) =$$

$$= \lambda(M_S \cup N_S) - ((1-s)\lambda(Cf'(U)) + s\lambda(Cg'(U))) > 1 - ((1-s)\varepsilon + s\varepsilon) = 1 - \varepsilon$$

Damit ist alles gezeigt. $\S$

Nun zum Beweis, daß mit G ein positives Beispiel im Sinne von 1.8 (a) gegeben ist:

2.1.2 Satz:

Für eine beliebige Untergruppe H von G gilt $(G, H) \in \mathcal{W}_{\text{eff}}$.

Beweis: Es wird gezeigt: H enthält für jedes $x \in I_H \mathcal{W}_G$ die ganze Konjugationsklasse $[x]_{\sim} := \{g^{-1}xg \mid g \in G\}$ von x bezüglich G ;

damit folgt $I_H \mathcal{W}_G = \text{ID}_H$.

Sei $x \in I_H \mathcal{W}_G$, $N(U, \varepsilon) \in \mathcal{W}_G$, $\pi(N(U, \varepsilon)) \subset \text{Fix}(k_x)$ und

$\{a_0, \dots, a_n\}$ eine Zerlegung von $[0, 1)$ derart, daß $a_{i+1} - a_i < \varepsilon$ für alle $i = 0, 1, \dots, n-1$. Ferner sei $g \in G$ beliebig. Nun definiert man für $i \in \{0, \dots, n-1\}$ $f_i: [0, 1) \rightarrow X$ durch

$$f_i(u) := \begin{cases} g(u) & \text{für } u \in [a_i, a_{i+1}) \\ e & \text{sonst} \end{cases}$$

Offenbar gilt dann: $\bigwedge_i f_i \in N(U, \varepsilon)$ und daher $f_i^{-1}x f_i$, $f_i^{-1}x f_i x^{-1} \in H$

Bildet man nun das Produkt

$$f := f_0^{-1}x f_0 x^{-1} f_1^{-1}x f_1 x^{-1} \dots f_{n-2}^{-1}x f_{n-2} x^{-1} f_{n-1}^{-1}x f_{n-1} x^{-1}, \text{ so ist } f \in H$$

und es gilt für ein $u \in [a_i, a_{i+1})$:

$$f(u) = e^{-1}x(u)ex^{-1}(u)e^{-1}x(u)ex^{-1}(u) \dots f_i^{-1}(u)x(u)f_i(u)x^{-1}(u) \dots e^{-1}x(u)ex^{-1}(u)$$

Deshalb folgt nach Definition der f_i :

$$\bigwedge_{u \in [a_i, a_{i+1})} f(u) = g^{-1}(u)x(u)g(u)x^{-1}(u), \text{ und da dies für alle}$$

$i = 0, \dots, n-1$ gilt, erhält man:

$$f = g^{-1}xg x^{-1}, \text{ also ist } g^{-1}xg x^{-1} \in H \text{ und damit auch } g^{-1}xg \in H.$$

Da das für alle $g \in G$ gleichermaßen richtig ist, folgt $[x]_{\sim} \subset H$. $\S$

Bei diesem eben vorgestellten Typ von topologischen Gruppen, können je nach der Struktur von X viele topologische Eigenschaften auftreten, so daß sich nach Wahl beliebiger Untergruppen H stets ein positives Ergebnis einstellt. Daher erscheint es angebracht, an einem Gegenbeispiel zu zeigen, daß es Gruppen G und $H \subset G$ gibt mit $(G, H) \notin \mathcal{U}_{0a}$. Die Gruppe G des Gegenbeispiels, das im Folgenden dargestellt werden soll, besitzt viele der topologischen Eigenschaften, welche die in 2.1 definierte Gruppe (in Abhängigkeit von X) haben kann. Daraus ist ersichtlich, daß diese Eigenschaften kein Kriterium für ein positives oder negatives Resultat sein können.

2.2 Ein Gegenbeispiel:

Sei G die Menge aller Homöomorphismen des Intervalls $[0,1]$ auf sich, die 0 festlassen. $[0,1]$ ist dabei mit der üblichen Topologie versehen. Verwendet man die Komposition von Abbildungen " $\circ$ " als Verknüpfung, so bildet $(G, \circ)$ eine nichtabelsche Gruppe. Durch $d: G \times G \rightarrow \mathbb{R}$, $d(f, g) := \max_{u \in [0,1]} |f(u) - g(u)|$ ist eine rechtsinvariante Metrik auf G definiert und G ist bezüglich der von der Metrik induzierten Topologie τ eine topologische Gruppe. Man verifiziert dies durch einfaches Nachrechnen. Wie in 2.1 sollen auch hier einige Eigenschaften von G angegeben werden:

(1) G ist bogenweise zusammenhängend: Seien $f, g \in G$ gegeben.

Man definiert dann eine Abbildung $w: [0,1] \rightarrow G$ durch

$w_s := w(s)$, $w_s(u) := sf(u) + (1-s)g(u)$. w ist wohldefiniert und es ist $w_0 = g$, $w_1 = f$. Für $s, t \in [0,1]$ gilt:

$$\begin{aligned} d(w_s \circ w_t^{-1}, id) &= d(w_s, w_t) = \max_{u \in [0,1]} |w_s(u) - w_t(u)| = \\ &= \max_{u \in [0,1]} |(s-t)f(u) - (s-t)g(u)| = |s-t|d(f, g) \end{aligned}$$

Daraus ist sofort die Stetigkeit von w zu entnehmen.

- (2) G ist lokal bogenweise zusammenhängend: Da $\{w_s(u) \mid s \in [0,1]\}$

die Verbindungsstrecke von $f(u)$ mit $g(u)$ ist, folgt:

$$\bigwedge_{u \in [0,1]} f(u) \leq w_s(u) \leq g(u) \quad \text{oder} \quad g(u) \leq w_s(u) \leq f(u) \quad . \text{ Mit}$$

$$d(f, id) , d(g, id) < \varepsilon \text{ folgt damit auch } d(w_s, id) < \varepsilon .$$

- (3) G ist separabel: Denn wie man leicht sieht, besitzt G eine abzählbare dichte Teilmenge, die aus stückweise affinen Abbildungen besteht.

- (4) G ist nicht vollständig: Sei $f_n \in G$ so, daß

$$f_n(u) := \begin{cases} \frac{1}{2}u & \text{für } u \in [0, \frac{1}{2}] \\ (2-\frac{1}{2})u - 1 + \frac{1}{2} & \text{für } u \in [\frac{1}{2}, 1] \end{cases}$$

Dann ist (f_n) eine Rechts-Cauchyfolge in G , die keinen Limes in G besitzt.

- (5) G ist keine SIN-Gruppe: Zu jedem $f \in G$ aus einer ε -Umgebung mit $f(\frac{1}{2}) = \frac{1}{2} + \varepsilon$, $\varepsilon > 0$, gibt es ein $g \in G$ mit $g(\frac{1}{2}) = \frac{1}{2}$ und $g^{-1}(\frac{1}{2} + \varepsilon) = \frac{3}{4}$, d.h. $d(g^{-1}fg, id) \geq \frac{1}{4}$.

Nun wird eine Untergruppe $H \subset G$ angegeben, derart daß $(G, H) \notin \mathcal{N}_{\text{Oa}}$ gilt:

$$H := \{f \in G \mid f(\frac{1}{2}) = \frac{1}{2}\}$$

Es ist klar, daß H eine abgeschlossene von $\{id\}$ verschiedene Untergruppe von G ist. Darüber hinaus enthält H keinen von $\{id\}$ verschiedenen Normalteiler von G : Wenn $h \in H$ und $h \neq id$, dann gibt es ein $u \neq \frac{1}{2}$ mit $h(u) \neq u$. Wähle nun ein $g \in G$ so, daß $g(\frac{1}{2}) = u$ (solche g gibt es sicher in großer Vielzahl). Dann gilt:

$$(g^{-1} \circ h \circ g)(\frac{1}{2}) = g^{-1}(h(u)) \neq g^{-1}(u) = g^{-1}(g(\frac{1}{2})) = \frac{1}{2} . \text{ Somit folgt}$$

$g^{-1}hg \notin H$ und H enthält nicht die Konjugationsklasse von h .

Also operiert G effektiv auf G/H und es ist $ID_H = \{id\}$.

Es gilt nun $(G, H) \notin \mathcal{U}_{Oa}$:

Sei jetzt $U \in \mathcal{U}_G$, $U := \{f \in G \mid d(f, id) < \frac{1}{4}\}$ und $h \in H$ so, daß $h \neq id$ und $h|_{[0, \frac{1}{4}]} = id$; dann läßt k_h die Menge $\pi(U)$ punktweise fest:

Für $g \in U$ gilt stets: $g(\frac{1}{2}) < \frac{3}{4} \Rightarrow \bigwedge_{g \in U} h(g(\frac{1}{2})) = g(\frac{1}{2}) \Rightarrow$

$\Rightarrow \bigwedge_{g \in U} (g^{-1}hg)(\frac{1}{2}) = \frac{1}{2} \Rightarrow \bigwedge_{g \in U} g^{-1}hg \in H$. Nach 1.5 (a) folgt

$h \in I_H \mathcal{U}_G$. $\text{Fix}(k_h)$ enthält aber keine nichtleere offen-abgeschlossene Menge, da sonst wegen des Zusammenhangs von G/H

$h \in ID_H = \{id\}$ folgen würde. Also ist $(G, H) \notin \mathcal{U}_{Oa}$. $\quad \square$

Bemerkungen:

- (a) Gemäß der Definition von H und h und dem Beweisgang sieht man, daß auf diese Weise eine ganze Klasse von Untergruppen des gleichen Typs wie H definierbar ist, für die auch $(G, H) \notin \mathcal{U}_{Oa}$ gilt.
- (b) Gegeben sei eine Untergruppe $G' \subset G$ mit einer feineren Gruppentopologie als $\tau \cap G'$ und es gebe ein $s > \frac{1}{2}$ und ein $h \in G' \cap H$ derart, daß $h \neq id$ und $h|_{[0, s]} = id$. Operiert dann G' effektiv auf $G'/(G' \cap H)$, so verläuft der letzte Teil des Beweises vollständig analog und auch in diesem Fall folgt: $(G', G' \cap H) \notin \mathcal{U}_{eff}$. Falls $G'/(G' \cap H)$ zusammenhängend ist, gilt darüber hinaus: $(G', G' \cap H) \notin \mathcal{U}_{Oa}$.
- (c) Nimmt man in 2.1 für X die Gruppe aus 2.2, so kann diese nach 2.1 (5) als Untergruppe der Gruppe aus 2.1 aufgefaßt werden. Daraus läßt sich entnehmen:

Wenn eine Gruppe die Eigenschaft " $(G,H) \in \mathcal{U}_{Oa}$ für alle Untergruppen $H \subset G$ " hat, so überträgt sich das im Allgemeinen nicht auf die Untergruppen von G .

Das folgende Beispiel verdanke ich Herrn Prof. Roelcke:

2.3 Beispiel:

Seien G, H wie in 2.2. H ist abgeschlossen in G . Definiert man nun $S := \{h \in H \mid h \text{ ist stückweise affin}\}$, so ist S eine dichte Untergruppe von H . Es wird nun gezeigt, daß $(G, S) \in \mathcal{U}_{eff}$ gilt, obwohl $(G, H) \notin \mathcal{U}_{Oa}$.

Sei nun $h \in I_S \mathcal{U}_G$ und $\pi(U) \subset \text{Fix}(k_h)$. Zu zeigen ist: $h \in \text{ID}_S$. Dazu sei $J \subset [0, 1]$ ein beliebiges nichtleeres offenes Intervall, so daß mit geeignetem $\alpha \in \mathbb{R}^+$ und $\beta \in \mathbb{R}$ gilt:

$$\bigwedge_{t \in J} h(t) = \alpha t + \beta \quad (\#)$$

Zeigt man nun $\alpha = 1$ und $\beta = 0$, so ist $h = \text{id}_{[0,1]}$ und man ist fertig. Zu einem beliebigen kompakten Teilintervall $K \subset J$ positiver Länge gibt es ein $V \in \mathcal{U}_G$ mit $V \subset U$, so daß gilt: $\bigwedge_{f \in V} f(K) \subset J$.

Es existiert ein $\varepsilon \in (0, 1)$, so daß für alle $\lambda \in (0, \varepsilon)$ die

durch $f_\lambda(t) = \frac{t}{\lambda t + 1 - \lambda}$, $t \in [0, 1]$ definierte Funktion f_λ in V liegt. Da wegen 1.2 (a) $\bigwedge_{\lambda \in (0, \varepsilon)} f_\lambda^{-1} h f_\lambda \in S$, folgt mit (#):

Zu jedem $\lambda \in (0, \varepsilon)$ gibt es ein nichtleeres offenes Intervall

$L \subset K$ und $\alpha_\lambda \in \mathbb{R}^+$, $\beta_\lambda \in \mathbb{R}$, so daß $\bigwedge_{t \in L} \alpha f_\lambda(t) + \beta = f_\lambda(\alpha_\lambda t + \beta_\lambda)$

$$\text{d.h.} \quad \alpha \frac{t}{\lambda t + 1 - \lambda} + \beta = \frac{\alpha_\lambda t + \beta_\lambda}{\lambda(\alpha_\lambda t + \beta_\lambda) + 1 - \lambda}$$

Da beide Seiten für $t \in L$ analytische Funktionen darstellen, gilt diese Gleichung für alle $t > 0$. Für $t \rightarrow \infty$ ergibt sich $\frac{\alpha}{\lambda} + \beta = \frac{\alpha_\lambda}{\lambda}$. Dies gilt für alle $\lambda \in (0, \varepsilon)$, somit folgt $\alpha = 1$ und $\beta = 0$.

§3. Lokal kompakte Gruppen

In diesem Abschnitt sollen alle Gruppen als lokal kompakt vorausgesetzt werden. Dabei soll der Begriff "lokal kompakt" den Begriff "hausdorffsch" einschließen.

Da es über die Struktur von LIE-Gruppen sehr viele Aussagen gibt und damit ein Feld wichtiger Hilfsmittel zur Verfügung steht, liegt es nahe zunächst LIE-Gruppen zu betrachten.

3.1 LIE-Gruppen

Dieser Begriff soll in diesem Abschnitt im Sinne der folgenden (üblichen) Definition verstanden werden:

3.1.1 Definition:

Eine (reelle) LIE-Gruppe ist eine reell-analytische Mannigfaltigkeit, die mit einer Gruppenstruktur versehen ist, derart daß die Gruppenoperationen analytisch sind.

Da jede (analog definierte) komplexe LIE-Gruppe auch als reelle LIE-Gruppe doppelter Dimension aufgefaßt werden kann, bedeutet die Festlegung auf den reellen Fall keine Beschränkung der folgenden Ergebnisse.

Es sollen nun einige im Weiteren benötigte Sätze über LIE-Gruppen bereitgestellt werden. Bei nicht bewiesenen Teilen wird hierbei auf die Literatur verwiesen.

3.1.2 Satz:

Sei G eine LIE-Gruppe und H eine abgeschlossene Untergruppe

von G . Dann gilt:

- (a) G/H ist auf kanonische Weise eine analytische Mannigfaltigkeit.
- (b) Die kanonischen Homöomorphismen von G/H sind analytisch.
- (c) Ist H ein Normalteiler von G , so ist G/H , versehen mit kanonischen Struktur, eine LIE-Gruppe.

Beweis: Siehe etwa (6) S. 44 Theorem 6.

§

Im Folgenden soll λ_G stets ein linkes Haarsches Maß auf der lokal kompakten Gruppe G und λ^n das übliche Lebesgue-Borelsche Maß im $\mathbb{R}^n$ bezeichnen. Der Begriff " λ_G -meßbar" bezieht sich stets auf die $\mathcal{G}$ -Algebra der Borelschen Mengen von G .

3.1.3 Satz:

Ist G eine LIE-Gruppe, $\dim G = n$, (U, k) ein Koordinatensystem in G mit $U \in \mathcal{U}_G$, so gilt für eine Borelsche Teilmenge $M \subset U$:

$$\lambda_G(M) > 0 \iff \lambda^n(k(M)) > 0$$

Beweis: Nach (22) Ch. 3 §3. 3.7 und 3.8 gelten folgende Überlegungen:

Ist $V \in \mathcal{U}_G$ offen mit $V^2 \subset U$, so ist durch

$$\mu(B) := \int_{k(B)} |\det(\partial_q F(p, q))_{q=0}^{-1}| d\lambda^n(p) \quad \text{für jede Borelsche Menge}$$

$B \subset V$ ein Maß auf der Borelstruktur von V definiert, das lokal die Eigenschaften eines linken Haarschen Maßes hat. Es gibt dann genau ein linkes Haarsches Maß λ_G auf G , so daß $\lambda_G|_V = \mu$.

Dabei ist $F: k(V) \times k(V) \longrightarrow k(U)$, $F(p, q) := k(k^{-1}(p) \cdot k^{-1}(q))$

und $\partial_q F(p, q)$ ist die Funktionalmatrix mit den Elementen

$$\frac{\partial(F_i(p, q))}{\partial q_j} \quad . \quad F_i(p, q) \text{ bezeichnet die Komponenten von } F \text{ und } q_j$$

diejenigen von q . Die Funktion $\det(\partial_q F(p, q))_{q=0}^{-1}$ ist für alle $p \in k(V)$ von 0 verschieden, daher ist eine Menge $B \subset V$ genau

dann eine λ_G -Nullmenge, wenn $k(B)$ eine λ^n -Nullmenge ist.

Wegen der Linksinvarianz von λ_G kann man o.B.d.A. annehmen, daß $\lambda_G(M \cap V) > 0$ ist.

Mit $B := M \cap V$ ist der Beweis vollendet.

§

3.1.4 Satz:

Ist G eine LIE-Gruppe und $H \subset G$ eine abgeschlossene Untergruppe mit $\dim G = n$, $\dim G/H = m$ (vgl. 3.1.2 (a)), so gibt es ein Koordinatensystem (U, k) , $U \in \mathcal{U}_G$ und ein Koordinatensystem $(\pi(U), \tilde{k})$ von G/H , das zur analytischen Struktur von G/H gehört ($\tilde{k}: \pi(U) \rightarrow \mathbb{R}^m$) mit:

(a) Ist $M \subset U$ eine Borelsche Teilmenge von G , so gilt:

$$\lambda_G(M) > 0 \Rightarrow \lambda^m(\tilde{k}(\pi(M))) > 0.$$

(b) Ist $N \subset \pi(U)$ eine Borelsche Teilmenge von G/H , so gilt:

$$\lambda^m(\tilde{k}(N)) > 0 \Rightarrow \lambda_G(U \cap \tilde{\pi}(N)) > 0.$$

Beweis: Nach (27) S. 120 Theorem 3.58 gibt es in G ein Koordinatensystem (U, k) , $U \in \mathcal{U}_G$ relativ kompakt mit folgenden Eigenschaften:

(α) $k(U) = \{(x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n \mid \bigwedge_{i=1, \dots, n} |x_i| < \varepsilon\}$ (mit einem geeigneten $\varepsilon > 0$)

ist ein n -dimensionaler offener Würfel, der sich in $(n-m)$ -dimensionale disjunkte Teilwürfel $W_{\mathcal{A}}$ so zerlegen läßt:

(β) $k(U) = \bigcup_{\mathcal{A}} W_{\mathcal{A}}$, wobei $\mathcal{A} \in \mathbb{R}^m$ und

$$W_{\mathcal{A}} := \{(x_1, \dots, x_n) \in k(U) \mid \mathcal{A} = (x_1, \dots, x_m) \text{ ist konstant}\}$$

(γ) $\pi|_{k^{-1}(W_{\mathcal{A}})}$ ist konstant und

(δ) $\pi(k^{-1}(W_{\mathcal{A}_1})) \neq \pi(k^{-1}(W_{\mathcal{A}_2}))$ für $\mathcal{A}_1 \neq \mathcal{A}_2$.

Für die m -dimensionalen, zu den $W_{\mathcal{A}}$ orthogonalen Teilwürfel

$$W_0' := \{(x_1, \dots, x_n) \in k(U) \mid y = (x_{m+1}, \dots, x_n) \text{ ist konstant}\}$$

$$\text{folgt nach } (\kappa) : W_y' \cap W_{\mathcal{A}} \neq \emptyset \text{ f\"ur alle } W_y', W_{\mathcal{A}} = \emptyset \quad (1)$$

$$\text{und} \quad k(U) = \bigcup_y W_y', \text{ wobei } y \in \mathbb{R}^{n-m} \quad (2)$$

Mit Hilfe von 3.1.3 folgt aus $M \subset U$ und $\lambda_G(M) > 0$, da β $\lambda^n(k(M)) > 0$ ist. Da $k(M) \subset k(U)$ liefert der Satz von Fubini zusammen mit (2) :

$$\text{Es gibt ein } W_{y_0}' \subset k(U) \text{ mit : } \lambda^m(k(M) \cap W_{y_0}') > 0 \quad (3)$$

$$\text{Nun definiert man : } h := \pi \circ k^{-1} \big|_{W_{y_0}'}, \quad h: W_{y_0}' \longrightarrow \pi(U).$$

Die in (κ) bis (δ) aufgef\"uhrten Eigenschaften der Zerlegung von $k(U)$ erm\"oglichen es nun, h als Hom\"omorphismus nachzuweisen :

Wegen der Stetigkeit von k^{-1} und π ist h offenbar stetig. Sind $z_1, z_2 \in W_{y_0}'$ verschieden, so gibt es nach Definition der $W_{\mathcal{A}}$ zwei Werte $\mathcal{A}_1 \neq \mathcal{A}_2 \in \mathbb{R}^m$, so da β $z_1 \in W_{\mathcal{A}_1}$ und $z_2 \in W_{\mathcal{A}_2}$, was nach (τ) und (δ) und der Definition von h unmittelbar $h(z_1) \neq h(z_2)$ bedeutet. Somit ist h injektiv.

Die Surjektivit\"at von h entnimmt man folgender Umformung:

$$\begin{aligned} h(W_{y_0}') &= \pi(k^{-1}(W_{y_0}')) \stackrel{(\delta)}{=} \pi(k^{-1}(\bigcup_{\mathcal{A}} (W_{\mathcal{A}} \cap W_{y_0}'))) = \bigcup_{\mathcal{A}} \pi(k^{-1}(W_{\mathcal{A}} \cap W_{y_0}')) = \\ &\stackrel{(\tau)}{=} \bigcup_{\mathcal{A}} \pi(k^{-1}(W_{\mathcal{A}})) = \pi(k^{-1}(\bigcup_{\mathcal{A}} W_{\mathcal{A}})) \stackrel{(\delta)}{=} \pi(k^{-1}(k(U))) = \pi(U) \end{aligned}$$

Betrachtet man eine offene Menge O in W_{y_0}' , die sich in der Form $O = V \cap W_{y_0}'$ darstellen l\"a β t, wobei V ein zu $k(U)$ kantenparalleler offener Teilw\"urfel ist, so gilt:

$$\begin{aligned} h(O) &= \pi(k^{-1}(O)) \stackrel{(\delta)}{=} \pi(k^{-1}(\bigcup_{\mathcal{A}} W_{\mathcal{A}} \cap O)) \stackrel{(\tau)}{=} \pi(k^{-1}(\bigcup_{\mathcal{A}} W_{\mathcal{A}} \cap V)) = \\ &= \pi(k^{-1}(V)). \text{ Also ist } h(O) \text{ offen in } \pi(U) \text{ und weil die Mengen} \\ &\text{vom Typ der betrachteten Menge } O \text{ eine Basis der Topologie von} \\ &W_{y_0}' \text{ bilden, ist } h \text{ eine offene Abbildung. Definiert man nun} \\ &k := h^{-1}, \text{ so ist } k: \pi(U) \longrightarrow W_{y_0}' \text{ ein Hom\"omorphismus und weil} \end{aligned}$$

W'_{y_0} als Teilmenge von $\mathbb{R}^m$ aufgefaßt werden kann, ist $(\pi(U), \tilde{k})$ ein Koordinatensystem von G/H , das zur analytischen Struktur von G/H gehört, wie es etwa in (27) S. 120-122 nachgewiesen wird. Nun bleibt noch (a) und (b) zu zeigen.

Zu (a): Es gilt $\tilde{k}^{-1}(k(M) \cap W'_{y_0}) = \pi(k^{-1}(k(M) \cap W'_{y_0}) = \pi(M \cap k^{-1}(W'_{y_0})) \subset \pi(M)$; $\tilde{k}(\pi(M))$ umfaßt also $k(M) \cap W'_{y_0}$, womit sich mit (3) die Behauptung " $\lambda^m(\tilde{k}(\pi(M))) > 0$ " von (a) ergibt.

Zu (b): Sei nun $\lambda^m(\tilde{k}(N)) > 0$ für ein $N \subset \pi(U)$. Wegen (7) bestätigt man leicht, daß $k(U \cap \tilde{\pi}^{-1}(N)) = \bigcup_{W' \cap k(\tilde{k}^{-1}(N) \cap U) \neq \emptyset} W'_e$ (4)
Da außerdem nach Konstruktion von $\tilde{k}$ gilt: $k(\tilde{\pi}^{-1}(N) \cap U) \cap W'_{y_0} = \tilde{k}(N)$ erhält man mit (1) und (4): $\lambda^m(k(U \cap \tilde{\pi}^{-1}(N)) \cap W'_{y_0}) = \lambda^m(\tilde{k}(N))$ für alle $W'_y \neq \emptyset$. Somit folgt $\lambda^n(k(U \cap \tilde{\pi}^{-1}(N))) > 0$, also mit 3.1.3 $\lambda_G(U \cap \tilde{\pi}^{-1}(N)) > 0$.

Unter Verwendung von 3.1.2 läßt sich zeigen:

3.1.5 Proposition:

Ist G eine LIE-Gruppe und $H \subset G$ eine abgeschlossene Untergruppe, so folgt $(G, H) \in \mathcal{V}_{oa}$.

Beweis: Sei $x \in I_H \mathcal{V}_G$, $\pi(U) \subset \text{Fix}(k_x)$ und $U \in \mathcal{V}_G$. Wenn dann $\pi(zV)$ eine offene, zusammenhängende Umgebung ($V \in \mathcal{V}_G$ offen) eines $zH \in (\text{Fix}(k_x)^\circ)^-$ ist, so stimmen die analytischen Homöomorphismen k_x und $\text{id}_{G/H}$ (vgl. 3.1.2 (b)) auf der nichtleeren offenen Teilmenge $\pi(zV) \cap \text{Fix}(k_x)^\circ$ überein. Mit Hilfe des bekannten Identitätssatzes für analytische Abbildungen (vgl. (9) S. 206 Satz 9.4.2) läßt sich zeigen, daß k_x und $\text{id}_{G/H}$ dann auf $\pi(zV)$ übereinstimmen. Somit erhält man:
 $zH \in \text{Fix}(k_x)^\circ$, also ist $\text{Fix}(k_x)^\circ$ abgeschlossen und weil

$H \in \text{Fix}(k_X)^\circ$, folgt $(G, H) \in \mathcal{U}_{0a}$.

Entscheidend für das weitere Vorgehen ist, daß sich der in 3.1.5 verwendete Identitätssatz folgendermaßen verallgemeinern läßt:

3.1.6 Proposition:

Sei $U \subset \mathbb{R}^n$ offen, λ^n das übliche Lebesgue-Borelsche Maß auf $\mathbb{R}^n$ und seien $f, g: U \rightarrow \mathbb{R}^m$ reell analytische Abbildungen. Ist dann $M \subset U$ meßbar, $\lambda^n(M) > 0$ und $f|_M = g|_M$, so folgt $f|_V = g|_V$ für jede offene, zusammenhängende Menge V mit $M \subset V \subset U$.

Beweis: Sei V eine solche Menge. Es ist klar, daß es dann einen kompakten Würfel $W \subset V$ gibt mit $\lambda^n(M \cap W) > 0$.

Es genügt nun zu zeigen: $f|_{M \cap W} = g|_{M \cap W} \Rightarrow f|_W = g|_W$.

Dann folgt nämlich mit Hilfe des üblichen Identitätssatzes:

$f|_V = g|_V$. (Wegen dieser Überlegung kann man auch o.B.d.A. $M \subset W$ voraussetzen).

Nun der Beweis durch vollständige Induktion nach n :

$n=1$: Sei $M \subset W = [a, b]$. $\lambda^1(M) > 0 \Rightarrow |M| = \infty$. Es gibt eine offene, zusammenhängende Umgebung U_W von W , die in U enthalten ist und auf der $f-g$ analytisch ist. Nach Voraussetzung gilt $f-g|_M = 0$, woraus mit Satz 9.4.3 in (9) S. 207 $f-g|_{U_W} = 0$, speziell also $f-g|_W = 0$ folgt.

$n-1 \rightarrow n$: Zunächst einige Definitionen:

$M_c := \{(x_1, \dots, x_{n-1}, c) \mid x_1, \dots, x_{n-1} \in \mathbb{R}\} \cap M$; $c \in \mathbb{R}$. U_c und W_c seien entsprechend definiert. Bezeichnet man mit f_M die charak-

teristische Funktion von M ,

so gilt: $\lambda^n(M) = \int \xi_M d\lambda^n$.

Mit Hilfe des Satzes von Fubini folgt weiter:

$$\int \xi_M d\lambda^n = \int \lambda^{n-1}(M_c) dc \quad \text{und}$$

das ist nach Voraussetzung

größer als 0. Daher gibt es eine Folge $(c_k)_{k \in \mathbb{N}}$ mit

$\bigwedge_{k \in \mathbb{N}} \bigvee_{\alpha_k \in \mathbb{R}^{n-1}} (\alpha_k, c_k) \in W$, $c_k \in \mathbb{R}$ und $c_i \neq c_j$ für $i \neq j$, so daß

$\bigwedge_{k \in \mathbb{N}} \lambda^{n-1}(M_{c_k}) > 0$. Faßt man nun M_c, U_c und W_c als Teilmengen von

$\mathbb{R}^{n-1}$ auf und definiert noch $f_c, g_c: U_c \rightarrow \mathbb{R}^m$ durch

$g_c, f_c: (x_1, \dots, x_{n-1}) \mapsto g, f(x_1, \dots, x_{n-1}, c)$, so sind f_c und g_c

analytisch in U_c und es gilt: $\bigwedge_{k \in \mathbb{N}} \lambda^{n-1}(M_{c_k}) > 0$ und $f_{c_k}|_{M_{c_k}} =$

$= g_{c_k}|_{M_{c_k}}$, woraus nach Induktionsvoraussetzung folgt:

$f_{c_k}|_{W_{c_k}} = g_{c_k}|_{W_{c_k}}$. Also stimmen f und g auf unendlich vielen

$(n-1)$ -dimensionalen "Quadraten" überein. Definiert man nun:

$W_v := \{ (v, x) \mid x \in \mathbb{R} \} \cap W$; $v \in \mathbb{R}^{n-1}$, U_v entsprechend, so gilt

wegen der Kompaktheit von W für jedes nichtleere W_v :

(c_k) hat einen Häufungspunkt c_0 mit $c_0 \in W$ und $(v, c_0) \in W_v$.

Analog zum Fall W_c und U_c faßt man W_v, U_v als Teilmengen von

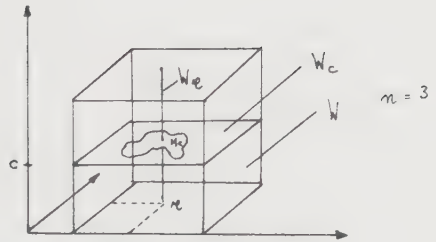
$\mathbb{R}$ auf und definiert $f_v, g_v: U_v \rightarrow \mathbb{R}^m$ durch $f_v, g_v(x) := f, g(v, x)$.

Dann sind f_v und g_v analytisch in U_v und es gilt: $\bigwedge_{k \in \mathbb{N}} g_v(c_k) = f_v(c_k)$.

Wie bei $n=1$ folgert man nun: $f_v|_{W_v} = g_v|_{W_v}$, und da $\bigcup_v W_v = W$ erhält

man $f|_W = g|_W$.

§



Der folgende Satz beweist unter Verwendung von 3.1.6 die Zugehörigkeit von $x \in H$ zu $I_H \mathcal{U}_G$, falls $\text{Fix}(k_X)$ eine bestimmte Eigen-

schaft hat.

3.1.7 Satz:

Sei G eine LIE-Gruppe und $H \subset G$ eine abgeschlossene Untergruppe. Es sei $x \in H$ und es gebe ein Koordinatensystem (U, h) von G/H mit $H \in U$, das zur analytischen Struktur von G/H gehört, derart daß die Borelmenge $h(U \cap \text{Fix}(k_x)) \subset \mathbb{R}^m$ (mit $m := \dim G/H$) ein positives Lebesgue-Maß hat; dann gilt $x \in I_H^{\mathcal{U}_G}$.

Beweis: Es gibt ein offenes, zusammenhängendes $V \subset U$ mit $H \in V$, so daß $\lambda^m(h(V \cap \text{Fix}(k_x))) > 0$. Wegen 3.1.2(b) sind dann die Abbildungen $f := h \circ k_x \circ h^{-1}$ und $g := \text{id}_{h(V)}$ analytisch und stimmen auf der Menge $h(V \cap \text{Fix}(k_x))$ überein. 3.1.6 mit

$M := h(V \cap \text{Fix}(k_x))$ liefert dann: $f|_M = g|_M$, d.h.

$k_x|_V = \text{id}_V$, also $V \subset \text{Fix}(k_x)$ und weil $H \in V$ folgt $\pi^1(V) \in \mathcal{U}_G$, also $x \in I_H^{\mathcal{U}_G}$. §

Nun sollen einige Mengen, die im Weiteren eine wichtige Rolle spielen, definiert und ihre Eigenschaften untersucht werden:

3.1.8 Definition:

Sei G eine lokal kompakte Gruppe:

- (a) $\mathcal{J}_G^+ := \{M \subset G \mid M \text{ ist } \lambda_G\text{-meßbar und } 0 < \lambda_G(M) < \infty\}$
- (b) Für $M \in \mathcal{J}_G^+$ sei $M^+ := \{a \in G \mid \bigwedge_{U \in \mathcal{U}_G} \lambda_G(aU \cap M) > 0\}$

Die Umgebungen U in (b) sollen dabei λ_G -meßbar sein. M^+ kann man als Menge der wesentlichen Punkte von M auffassen, die bedingt, daß eben $\lambda_G(M) > 0$ ist (vgl. etwa (18) S. 168).

In den folgenden vier Lemmata sollen einige Eigenschaften dieser Mengen dargestellt werden. Unmittelbar aus der Definition ist zu ersehen:

3.1.9 Lemma:

Für $M_1, M_2, M \in \mathcal{M}_G^+$ gilt:

$$(a) \quad M_1 \subset M_2 \Rightarrow M_1^+ \subset M_2^+$$

$$(b) \quad M^+ \subset M^-$$

$$(c) \quad (aM)^+ = aM^+ \quad \text{für } a \in G$$

$$(d) \quad (M_1 \cap M_2)^+ \subset M_1^+ \cap M_2^+$$

$$(e) \quad M \subset G \text{ offen} \Rightarrow M^+ = M^-$$

(f) Ist $G' \subset G$ eine offene Untergruppe, so gilt:

$$A \in \mathcal{M}_G^+ \quad \text{und} \quad A \subset G' \Rightarrow A \in \mathcal{M}_{G'}^+$$

Plausibel erscheint auch:

3.1.10 Lemma:

Für $M \in \mathcal{M}_G^+$ gilt: $M^+ \neq \emptyset$

Beweis: Da λ_G regulär ist, gibt es eine kompakte Teilmenge $A \subset M$, so daß $A \in \mathcal{M}_G^+$. Mit 3.1.9 (a) genügt es zu zeigen, daß $A^+ \neq \emptyset$.

Nimmt man etwa an: $\bigwedge_{a \in A} \bigvee_{U(a) \in \mathcal{U}_G} \lambda_G(aU(a) \cap A) = 0$, so ist $\bigcup_{a \in A} aU(a)$

eine offene Überdeckung von A , die wegen der Kompaktheit von A

eine endliche Teilüberdeckung $\bigcup_{k=1}^n a_k U(a_k)$ enthält. Daher gilt:

$$\lambda_G(A) \leq \sum_{k=1}^n \lambda_G(a_k U(a_k) \cap A) = 0, \quad \text{und das ist ein Widerspruch!} \quad \S$$

3.1.11 Lemma:

Für $M \in \mathcal{M}_G^+$ gilt:

(a) M^+ ist abgeschlossen in G .

(b) $\lambda_G(M) = \lambda_G(M^+)$, falls M abgeschlossen in G ist.

Beweis: (a) Zu jedem $b \notin M^+$ gibt es ein $U \in \mathcal{U}_G$, so daß

$\lambda_G(bU \cap M) = 0$. Es gilt nun: $bU^\circ \cap M^+ = \emptyset$, da es zu $u \in U^\circ$ ein

$V \in \mathcal{U}_G$ gibt mit $bUV \subset bU$. Also ist $\mathbb{C}M^+$ offen, daher ist M^+ ab-

geschlossen und λ_G -meßbar.

(b) Wegen 3.1.9 (b) gilt $M^+ \subset M$, also $\lambda_G(M^+) \leq \lambda_G(M)$. Wäre $\lambda_G(M^+) < \lambda_G(M)$, so wäre $\lambda_G(M-M^+) > 0$, also $M-M^+ \in \mathcal{N}_G^+$, also $(M-M^+)^+ \neq \emptyset$ nach 3.1.10.

Andererseits ist M^+ abgeschlossen nach (a), also $\mathbb{C}M^+$ offen in G und daher $(\mathbb{C}M^+)^+ = (\mathbb{C}M^+)^-$ nach 3.1.9 (e). Damit erhält man unter Verwendung von 3.1.9 (d):

$$(M-M^+)^+ = (M \cap \mathbb{C}M^+)^+ \subset M^+ \cap (\mathbb{C}M^+)^+ = M^+ \cap (\mathbb{C}M^+)^- = M^+ \cap \mathbb{C}((M^+)^o) \subset M^+ \cap \mathbb{C}M^+ = \emptyset. \quad \text{Das ist ein Widerspruch!} \quad \S$$

Das folgende Lemma spielt eine wichtige Rolle beim Beweis von 3.3.2, dem Hauptsatz dieses Paragraphen:

3.1.12 Lemma:

Ist $M \subset G$ kompakt, so gibt es ein $V \in \mathcal{V}_G$ mit :

$$\bigwedge_{a \in V} \bigvee_{A \in \mathcal{N}_G^+} A \subset M, \quad aA \subset M.$$

Beweis: Sei U eine offene Umgebung von M , so daß

$$\lambda_G(U) < 2 \cdot \lambda_G(M) \quad (1)$$

Es gibt solch ein U , da λ_G regulär ist. Da M kompakt ist, gibt es ein $V \in \mathcal{V}_G$ mit $VM \subset U$ und es gilt:

$$\bigwedge_{v \in V} (vM \cup M) \subset VM \subset U \Rightarrow \bigwedge_{v \in V} \lambda_G(vM \cup M) \leq \lambda_G(U) \quad (2)$$

$$\text{Weiter erhält man: } \bigwedge_{v \in V} \lambda_G(vM \cap M) = \lambda_G(vM) + \lambda_G(M) - \lambda_G(vM \cup M)$$

Mit (2) und der Linksinvarianz von λ_G folgt daraus:

$$\bigwedge_{v \in V} \lambda_G(vM \cap M) \geq 2 \cdot \lambda_G(M) - \lambda_G(U), \text{ und (1) liefert dann:}$$

$$\bigwedge_{v \in V} \lambda_G(vM \cap M) > 0. \quad (3)$$

Für $a \in V$ wird nun A so definiert: $A := a^{-1}M \cap M$

Klarerweise folgt dann $A, aA \subset M$ und mit $aA = M \cap aM$ ergibt

sich wegen $a \in V$ und (3) : $\lambda_G(A) = \lambda_G(aA) = \lambda_G(M \cap aM) > 0$.

also ist $A \in \mathcal{M}_G^+$. §

Wenn nun für ein $x \in G$ die Menge $\pi(M)$ von k_x punktweise festlassen wird und $M \in \mathcal{M}_G^+$ ist, so gilt: $\bigwedge_{a \in G} \pi(a^{-1}M) \subset \text{Fix}(k_{x_a})$ nach 1.2 (a) ; außerdem ist $a^{-1}M \in \mathcal{M}_G^+$ und falls $a \in M^+$, so folgt $e \in (a^{-1}M)^+$ nach 3.1.9 (c) . Falls H abgeschlossen ist, folgt wegen 3.1.9 (b) mit 1.2 (a): $\bigwedge_{a \in H^+} x_a = a^{-1}xa \in H$. Wenn $\text{Fix}(k_{x_a}) = G/H$, so gilt auch $\text{Fix}(k_x) = G/H$.

Zusammengefaßt ergibt das ähnlich wie in §1. S. 9 (nach 1.2):

Bei den folgenden Untersuchungen brauchen nur solche k_x betrachtet zu werden, für die $x \in H$ ist und die das Bild $\pi(M)$ einer Menge $M \subset G$ punktweise festlassen mit $M \in \mathcal{M}_G^+$ und $e \in M^+$. Setzt man noch $\mathcal{M}_G^+ := \{M \in \mathcal{M}_G^+ | e \in M^+\}$, so lassen sich die Mengen $I_H \mathcal{M}_G^+$, $\mathcal{M}_{\text{eff}}^+$ und $\mathcal{M}_{\text{oa}}^+$ vollständig analog zu 1.5 (a) und 1.7 definieren.

Da für $M_1, M_2 \in \mathcal{M}_G^+$ nicht notwendig $e \in (M_1 \cap M_2)^+$ folgt, läßt sich auf kanonischem Wege (wie etwa bei $I_H \mathcal{M}_G^+$) $I_H \mathcal{M}_G^+$ nicht als Untergruppe nachweisen. Da die kompakten e -Umgebungen von G eine Basis von $\mathcal{M}_G$ bilden und in $\mathcal{M}_G^+$ enthalten sind, gilt:

$I_H \mathcal{M}_G \subset I_H \mathcal{M}_G^+$, also auch $(G, H) \in \mathcal{M}_{\text{eff}}^+$ bzw. $(G, H) \in \mathcal{M}_{\text{oa}}^+$, falls $(G, H) \in \mathcal{M}_{\text{eff}}^+$ bzw. $(G, H) \in \mathcal{M}_{\text{oa}}^+$.

Im Falle einer LIE-Gruppe erhält man:

3.1.13 Lemma:

Ist G eine LIE-Gruppe und $H \subset G$ eine abgeschlossene Untergruppe, so gilt:

(a) $I_H \mathcal{M}_G^+ = I_H \mathcal{M}_G$

(b) $\pi(\mathcal{M}_G^+)$ umfaßt die Menge aller Borel-meßbaren $N \subset G/H$ mit folgender Eigenschaft: $\lambda_G(\tilde{\pi}^1(N)) < \infty$ und für jedes Koordinatensystem (V, l) von G/H mit $H \in V$, das zur analytischen Struktur von G/H gehört, gilt $\lambda^m(l(V \cap N)) > 0$ ($m := \dim G/H$) :

Beweis: (a) Direkt aus 3.1.4 (a) und 3.1.7 .

(b) Speziell für $V \subset \pi(U)$ und $l = \tilde{k}$ ($U, \tilde{k}$ wie in 3.1.4)

liefert 3.1.4 (b) : $\lambda_G(U \cap \tilde{\pi}^1(V \cap N)) > 0$, also $\tilde{\pi}^1(N) \in \mathcal{M}_G^+$. Weil, wie man sich leicht überzeugt, U in 3.1.4 beliebig klein gewählt werden kann, folgt gemäß Definition: $e \in (\tilde{\pi}^1(N))^+$, also $\tilde{\pi}^1(N) \in \mathcal{M}_G^+$.

Mit 3.1.13 (a) und 3.1.5 erhält man den folgenden Satz, der eine Verschärfung von 3.1.5 beinhaltet:

3.1.14 Satz:

Ist G eine LIE-Gruppe und $H \subset G$ eine abgeschlossene Untergruppe, so folgt $(G, H) \in \mathcal{M}_{Oa}^+$.

3.2 LIE-approximierbare Gruppen

In diesem Abschnitt wird die Zugehörigkeit von (G, H) zu $\mathcal{M}_{Oa}^+$ für den Fall LIE-approximierbarer Gruppen G untersucht. Eine lokal kompakte Gruppe G heißt dabei LIE-approximierbar oder kurz L-Gruppe, wenn es in jedem $U \in \mathcal{V}_G$ einen Normalteiler N von G gibt, so daß G/N eine LIE-Gruppe ist (vgl. (20) S. 153). Damit ist jede L-Gruppe auch projektiver Limes von LIE-Gruppen. Das folgende Lemma stellt einen Zusammenhang zwischen $\mathcal{M}_G^+$ und $\mathcal{M}_{G/N}^+$ her:

3.2.1 Lemma:

Ist G lokal kompakt, $N \subset G$ ein abgeschlossener Normalteiler von G und ist $M \in \mathcal{M}_G^+$ kompakt, so folgt $\varphi(M) \in \mathcal{M}_{G/N}^+$, wobei $\varphi: G \rightarrow G/N$ die kanonische Abbildung ist.

Beweis: Da $e \in M^+$, gilt für jede kompakte Umgebung $U \in \mathcal{V}_G$:
 $M^* := M \cap U$ ist kompakt und liegt in $\mathcal{M}_G^+$. Wenn $\lambda_{G/N}$ ein linkes Haarsches Maß auf G/N ist, so gibt es (vgl. (4) Chap. VII §2. n°2 Prop.4) ein Maß $\lambda^\#$ auf G , das zu λ_G äquivalent ist (vgl. (4) Chap. VII §2. n°5 Lemme 4). Weil M^* kompakt ist, ist M^* auch $\lambda^\#$ -integrabel und die charakteristische Funktion f_{M^*} von M^* ist $\lambda^\#$ -meßbar, also sind die Voraussetzungen von (4) Chap. VII §2. n°3 Prop.5 (b) erfüllt und es gilt:

$$\lambda^\#(M^*) = \int_G^* f_{M^*}(x) d\lambda^\#(x) = \int_{G/N}^* d\lambda_{G/N}(\varphi(x)) \int_N^* f_{M^*}(xn) d\lambda_N(n)$$

Da λ_G äquivalent zu $\lambda^\#$ ist und $M^* \in \mathcal{M}_G^+$, ist $\lambda^\#(M^*) > 0$.

Wenn $\varphi(x) \notin \varphi(M^*)$, so folgt $xN \cap M^* = \emptyset$, also $\int_N^* f_{M^*}(xn) d\lambda_N(n) = 0$.

Damit hat man:

$$0 < \int_{\varphi(M^*)}^* d\lambda_{G/N}(\varphi(x)) \int_N^* f_{M^*}(xn) d\lambda_N(n), \text{ was zur Folge hat: } \lambda_{G/N}(\varphi(M^*)) > 0.$$

Da dies für alle kompakten e -Umgebungen U gilt, folgt $N \in (\varphi(M))^+$ und weil $\infty < \lambda_{G/N}(\varphi(M))$ bedeutet dies schließlich: $\varphi(M) \in \mathcal{M}_{G/N}^+$. $\square$

Bemerkung: Ist N kompakt, so ist wegen der Stetigkeit von φ das Bildmaß $\mu_{G/N}(\bar{A}) := \lambda_G(\varphi(\bar{A}))$, $\bar{A} \subset G/N$ sinnvoll definiert und hat die Eigenschaften eines Haarschen Maßes. Mit $\mu_{G/N} = \beta \cdot \lambda_{G/N}$, $\beta \in \mathbb{R}$ und $\beta > 0$, läßt sich der Beweis dann analog führen.

Mit Hilfe von 3.2.1 und 3.1.14 läßt sich nun beweisen:

3.2.2 Satz:

Ist G eine L-Gruppe, $H \subset G$ eine abgeschlossene Untergruppe und ist G/H zusammenhängend, so gilt: $(G, H) \in \mathcal{M}_{\text{eff}}^+$.

Beweis: Sei $V \in \mathcal{M}_G$ kompakt. Weil G eine L-Gruppe ist, gibt es einen (kompakten) Normalteiler N_V von G , so daß $N_V \subset V$ und $G_V := G/N_V$ eine LIE-Gruppe ist. Seien $\varphi_V: G \rightarrow G_V$ und $\pi_V: G_V \rightarrow G_V/\varphi_V(H)$ die kanonischen Abbildungen. $\varphi_V(H)$ ist abgeschlossen in G_V , weil N_V kompakt ist.

Man betrachtet nun das folgende kommutative Diagramm, in dem alle unbezeichneten Abbildungen kanonisch definiert sein sollen:

$$\begin{array}{ccccc}
 G/H & \longrightarrow & G/HN_V & \longrightarrow & G_V/\varphi_V(H) \\
 \uparrow k_x & & & & \uparrow k_{\varphi_V(x)} \\
 G/H & \longrightarrow & G/HN_V & \longrightarrow & G_V/\varphi_V(H) \\
 \uparrow \pi & \searrow l & & & \uparrow \pi_V \\
 G & \xrightarrow{\varphi_V} & & & G_V
 \end{array}$$

l ist stetig, offen und surjektiv. Aus dem Diagramm läßt sich Folgendes entnehmen:

(1) $G_V/\varphi_V(H)$ ist zusammenhängend und

für ein $x \in I_H \mathcal{M}_G^+$ mit $\pi(M) \subset \text{Fix}(k_x)$, $M \in \mathcal{M}_G^+$ folgt $l(\pi(M)) = \pi_V(\varphi_V(M)) \subset \text{Fix}(k_{\varphi_V(x)})$.

Wegen 3.1.9 (b), der Abgeschlossenheit von $\text{Fix}(k_x)$ und der Definition von $\mathcal{M}_G^+$ kann M kompakt angenommen werden. Da nach

3.2.1 $\varphi_V(M) \in \mathcal{M}_{G_V}^+$, folgt $\varphi_V(x) \in I_{\varphi_V(H)} \mathcal{M}_{G_V}^+$. Nach 3.1.14

ist $(G_V, \varphi_V(H)) \in \mathcal{M}_{\text{Oa}}^+$, mit (1) also $(G_V, \varphi_V(H)) \in \mathcal{M}_{\text{eff}}^+$.

Dies gilt für alle kompakten $V \in \mathcal{W}_G$ und man hat erhalten:

$\bigwedge_{V \in \mathcal{W}_G} \varphi_V(x) \in \text{ID}_{\varphi_V(H)} \subset \varphi_V(H)$. Daraus folgt:

$$(2) \quad x \in D := \bigcap_{V \in \mathcal{W}_G} \varphi_V^{-1}(\text{ID}_{\varphi_V(H)}) \subset \bigcap_{V \in \mathcal{W}_G} \varphi_V^{-1}(\varphi_V(H)) = \bigcap_{V \in \mathcal{W}_G} \text{HN}_V \subset \bigcap_{V \in \mathcal{W}_G} \text{HV} = H .$$

Da aber jedes $\varphi_V^{-1}(\text{ID}_{\varphi_V(H)})$ und damit auch D ein Normalteiler von G ist, folgt $x \in D \subset \text{ID}_H$. Damit ist alles gezeigt. $\S$

3.3 Der allgemeine lokal kompakte Fall

Nach (20) S. 172 Corollary 4.5 gibt es zu jeder lokal kompakten Gruppe G eine offene Untergruppe G' und einen kompakten Normalteiler N von G' , so daß G'/N keine kleinen Untergruppen hat. Die Zusammenhangskomponente C_G von G ist dann in G' enthalten und es gilt wegen (11) §7. Theorem 7.12 S.63: $(\pi'(C_G))^-$ ist die Zusammenhangskomponente von G'/N . Wegen der Kompaktheit von N ist $\pi'(C_G)$ abgeschlossen in G'/N und auch offen nach (20) S. 163 Corollary 2. . $\pi': G' \rightarrow G'/N$ ist dabei die kanonische Abbildung.

$G^* := \pi'^{-1}(\pi'(C_G)) = C_G N$ ist dann eine in G' und damit auch in G offene Untergruppe, die wegen der Kompaktheit von G^*/C_G (vgl. (11) S. 44 Theorem 5.33 - danach gilt: $G^*/C_G \cong N/(C_G \cap N)$) eine L-Gruppe ist (vgl. (20) S. 175 Theorem 4.6).

Damit ist der Ansatzpunkt gegeben, um 3.2.2 anwenden zu können. Zunächst kann für den hier vorliegenden Fall 1.9 (a) folgendermaßen verallgemeinert werden:

3.3.1 Lemma:

$\bigwedge_{x \in I_{\mathfrak{p}} \mathcal{H}_G^+} \text{NI}(x)$ oder $N(H)$ enthält ein $M \in \mathcal{H}_G^+ \Rightarrow (G, H) \in \mathcal{H}_{\text{Oa}}^+$.

Beweis: Ist $M \in \mathcal{M}_G^+$, so folgt $MM^{-1} \in \mathcal{V}_G$ nach (11) S. 296
 Corollary 20.17. Falls $M \subset NI(x)$ für $x \in I_H \mathcal{M}_G^+$ oder $M \subset N(H)$,
 so gilt auch $MM^{-1} \subset NI(x)$ oder $MM^{-1} \subset N(H)$ und 1.9 (a)
 vollendet den Beweis. $\S$

Es kann nun der Hauptsatz von §3. bewiesen werden:

3.3.2 Satz:

Ist G lokal kompakt, $H \subset G$ eine abgeschlossene Untergruppe
 und G/H zusammenhängend, so ist $(G, H) \in \mathcal{M}_{\text{eff}}^+$.

Beweis: Sei G^* eine in G enthaltene offene L -Gruppe, die nach
 der Bemerkung vor 3.3.1 existiert. G^*H ist dann offen in G . Für
 jedes $g \notin G^*H$ ist G^*g eine offene Umgebung von g mit $G^*g \cap G^*H = \emptyset$.
 Somit ist G^*H auch abgeschlossen. $\pi(G^*H)$ ist dann offen und weil
 G^*H gesättigt mod H ist, auch abgeschlossen in G/H . Aus dem Zu-
 sammenhang von G/H folgt $\pi(G^*H) = G/H$, somit $G = G^*H$.
 Für das folgende kommutative Diagramm seien f_1, f_2, f_3 kanonisch
 definiert:

$$\begin{array}{ccc} G^*H/H = G/H & \xrightarrow{f_2} & G^*/(G^* \cap H) \\ \uparrow f_1 & \nearrow f_3 & \\ G^* & & \end{array}$$

f_2 ist stetig, da f_3 stetig und f_1 offen und surjektiv ist.
 Wegen der Surjektivität von f_2 ist mit G/H auch $G^*/(G^* \cap H)$
 zusammenhängend.

Mit Hilfe von 3.1.12 findet man nun zu jedem $x \in I_H \mathcal{M}_G^+$ ein
 $N \in \mathcal{M}_G^+$, von dem mittels 3.2.2 $N \subset NI(x)$ gezeigt werden kann.
 3.3.1 vollendet dann den Beweis.

Sei also $x \in I_H \mathcal{M}_G^+$, $M \in \mathcal{M}_G^+$ und $\pi(M) \in \text{Fix}(k_x)$. Da G^* offen in G ist, gibt es ein kompaktes $U \in \mathcal{W}_G$ mit $U \subset G^*$. Man wählt nun ein offenes $W \in \mathcal{W}_G$ so, daß folgende Bedingungen erfüllt sind:
 $W = W^{-1}$, $W^2 \subset U$ und $X^{-1}Wx \subset U$.

Da $e \in M^+$, genügt es nur solche Fälle zu betrachten, für die $M = M^- \subset W$ gilt. Damit ist 3.1.12 anwendbar und es gibt danach zu M ein $V \in \mathcal{W}_G$ mit: $\bigwedge_{a \in V} \bigvee_{A \in \mathcal{M}_G^+} A$, $aA \subset M$. Setzt man noch $N := M \cap V$, so ist $N \in \mathcal{M}_G^+$ und es gelten für beliebig gewählte $a \in N$ und $z \in A$ die Beziehungen:

$$a \in N \subset M \subset W \subset U \subset G^*, \quad z \in A \subset M \subset G^*, \quad az \in aA \subset M \quad (1)$$

$$x^{-1}ax \in x^{-1}Wx \subset U \subset G^* \quad (2)$$

$$x_a = a^{-1}xa, \quad x_z, \quad z^{-1}x_az \in H, \quad \text{wegen (1) und 1.2 (a)} \quad (3)$$

Dies liefert:

$$\left. \begin{array}{l} (2), (1) \Rightarrow x^{-1}x_a \in G^* \\ x \in H, (3) \Rightarrow x^{-1}x_a \in H \end{array} \right\} \Rightarrow \bigwedge_{a \in N} x^{-1}x_a \in G^* \cap H$$

$$(3) \Rightarrow \bigwedge_{z \in A} (z^{-1}x^{-1}x_az) = (z^{-1}x^{-1}z)(z^{-1}a^{-1}xaz) \in H$$

Das bedeutet: $\pi_{G^*}(A) \subset \text{Fix}(k_x^{-1}x_a) \subset G^*/(G^* \cap H)$, wobei $A \in \mathcal{M}_G^+$.

Ist dann $z \in A^+$, so folgt nach 1.2 (a):

$$\lambda_{G^*}(z^{-1}A) \subset \text{Fix}(k_z^{-1}x_a^{-1}) \subset G^*/(G^* \cap H) \quad \text{und} \quad e \in (z^{-1}A)^+ \Rightarrow$$

$$\Rightarrow z^{-1}A \in \mathcal{M}_G^+ \quad \text{und somit nach 3.1.9 (f) auch} \quad z^{-1}A \in \mathcal{M}_{G^*}^+. \quad \text{Damit ist}$$

$$\bigwedge_{a \in N} z^{-1}x^{-1}x_az \in I_{G^* \cap H} \mathcal{M}_{G^*}^+ = \widetilde{\text{ID}}_{G^* \cap H} := \{x \in G^* \cap H \mid \bigwedge_{g \in G^*} g^{-1}xg \in G^* \cap H\}$$

nach 3.2.2, also auch: $\bigwedge_{a \in N} x^{-1}x_a \in \widetilde{\text{ID}}_{G^* \cap H}$, da $z \in G^*$ und

$\widetilde{\text{ID}}_{G^* \cap H}$ ein Normalteiler von G^* ist. Da $G^* \cap H = G$, folgt

$$\widetilde{\text{ID}}_{G^* \cap H} \subset \text{ID}_H, \quad \text{also:} \quad \bigwedge_{a \in N} x^{-1}x_a \in \text{ID}_H, \quad \text{was} \quad N \subset \text{NI}(x) \quad \text{bedeutet.} \quad \S$$

Bemerkung: Der Gedanke mit einer offenen Untergruppe G' (mit $(G', G' \cap H) \in \mathcal{W}_{\text{eff}}$) zu arbeiten, taucht bereits in 1.9 auf. Der Beweis von 3.3.2 ist aber an die gegenüber 1.9 unterschiedliche Ausgangssituation angepaßt ($\mathcal{K}_G^+$ statt $\mathcal{W}_G$, G/H zusätzlich zusammenhängend) und wird daher etwas anders geführt.

3.4 Eine Permanenzeigenschaft

In 3.3 wurde unter Voraussetzung der Abgeschlossenheit von H und des Zusammenhangs von G/H " $(G, H) \in \mathcal{K}_{\text{eff}}^+$ " für beliebige lokal kompakte Gruppen G nachgewiesen. Da jede Quotientengruppe nach einem abgeschlossenen Normalteiler von G wieder lokal kompakt ist, bleibt dies auch für solche Gruppen gültig. Wie aber sieht es bei Produkten $\prod_{i \in I} G_i$ von lokal kompakten Gruppen G_i aus?

Zunächst ist dabei Folgendes zu festzustellen:

Da $\prod G_i$ im Allgemeinen nicht lokal kompakt ist, existiert auch kein Haarsches Maß auf $\prod G_i$. Man ersetzt daher $\mathcal{K}_G^+$ durch $\mathcal{W}_G$ und betrachtet dann eine etwas allgemeinere Klasse von Gruppen:

Definition:

Eine Gruppe G heiße lokal kompakt approximierbar, wenn es zu jedem $U \in \mathcal{W}_G$ einen Normalteiler $N_U \subset U$ von G gibt, so daß G/N_U lokal kompakt ist.

Für solche Gruppen gilt, ganz ähnlich wie bei den L-Gruppen:

Satz:

Ist G lokal kompakt approximierbar, $H \subset G$ eine abgeschlossene Untergruppe und G/H zusammenhängend, so folgt $(G, H) \in \mathcal{W}_{\text{eff}}$.

Beweis: Durch die Ähnlichkeit der Begriffe "lokal kompakt approximierbar" und "LIE-approximierbar" läßt sich der Beweis analog zum Beweis von 3.2.2 führen. Man ersetzt dabei lediglich die Begriffe "LIE-Gruppe" durch "lokal kompakte Gruppe", " $\mathcal{H}_G^+$ " bzw. " $\mathcal{H}_{\text{eff}}^+$ " durch " $\mathcal{U}_G$ " bzw. " $\mathcal{U}_{\text{eff}}$ " und $\varphi_V(H)$ durch $(\varphi_V(H))^-$ ($\varphi_V(H)$ ist nicht notwendig abgeschlossen, da N_V im Allgemeinen nicht kompakt ist).

Dann wendet man anstelle von 3.1.14 den Satz 3.3.2 an. Hierbei ist nur zu beachten, daß anstelle von " $x \in I_H \mathcal{H}_G^+$ " stets " $x \in I_H \mathcal{U}_G$ " gesetzt wird, was den ansonsten völlig analogen Beweisverlauf deutlich vereinfacht.

Die mit (2) im Beweis von 3.2.2 bezeichnete Zeile verändert sich in: $x \in D := \bigcap_{V \in \mathcal{W}_G} \tilde{\varphi}_V^{-1}(\text{ID}_{\varphi_V(H)}^-) \subset \bigcap_{V \in \mathcal{W}_G} \tilde{\varphi}_V^{-1}(\varphi_V(H)^-) = \bigcap_{V \in \mathcal{W}_G} (HN_V)^- \subset \bigcap_{V \in \mathcal{W}_G} HN_V \subset \bigcap_{V \in \mathcal{W}_G} HV^2 = H$.

Insbesondere läßt sich dies auf Produkte $\prod G_\nu$ von lokal kompakten Gruppen G anwenden:

Korollar:

Es seien H und G/H wie im Satz; ist dann $G = \prod_{\nu \in J} G_\nu$ und G_ν lokal kompakt, so folgt $(G, H) \in \mathcal{W}_{\text{eff}}$.

Beweis: Nach Definition der Produkttopologie läßt sich zu einem $U \in \mathcal{W}_G$ ein Normalteiler $N_U \subset U$ von G so wählen, daß für ein $n \in \mathbb{N}$ $G/N_U \cong \prod_{i=1}^n G_i/N_{U_i}$. Also ist G lokal kompakt approximierbar und der Satz anwendbar.

§4. Unendlichdimensionale LIE-Gruppen

Bei LIE-Gruppen im Sinne von A.3.1 spielen gewisse Potenzreihen (vgl. A.1) eine Rolle. Im Falle dieser LIE-Gruppen hat man zwar keine analytischen Abbildungen und keinen Identitätssatz wie in §3. unmittelbar zur Verfügung, aber es stellt sich die Frage, ob man nicht mit ähnlichen Methoden zu einem positiven Ergebnis gelangen kann.

Von einer gewissen Einschränkung abgesehen (H muß eine LIE-Untergruppe sein, vgl. A.4.), ist dies tatsächlich möglich. Bevor das gezeigt werden kann, müssen noch einige Voraussetzungen geschaffen werden:

Im Folgenden sei G stets eine LIE-Gruppe gemäß A.3.1 und $H \subset G$ eine LIE-Untergruppe gemäß A.4. (B, U_0) sei eine Linearisation von G , derart daß $(B \cap L(H), U_0 \cap H)$ eine Linearisation von H ist (vgl. A.3.3 und A.4. (iii)).

Da $L(H)$ abgeschlossen in $L(G)$ ist (vgl. A.4. (ii)), ist $L(G)/L(H)$ ein Banachraum.

$q: L(G) \rightarrow L(G)/L(H)$ sei die kanonische Abbildung. Man wählt nun nach A.4. (iv) ein $C \subset B$ mit den dort beschriebenen Eigenschaften, so daß $\widetilde{\exp}: C' \rightarrow W'$ ein Homöomorphismus ist. Dabei gilt: $C' \subset L(G)/L(H)$ und $W' \subset G/H$. Ferner sei $K \subset B$ eine offene Kugel mit 0 als Mittelpunkt und der Eigenschaft $K * K * K \subset C$.

Solch ein K gibt es nach A.1.3 (a).

4.1 Lemma:

Für $x, v, u \in K$ sind die Abbildungen $w(v, u), w(x, v, u): (-\varepsilon, 1+\varepsilon) \rightarrow L(G)$ definiert durch $w(v, u)(t) := tv*(1-t)u$ und $w(x, v, u)(t) := x*(tv*(1-t)u)$ wohldefiniert und analytisch, falls $\varepsilon > 0$ hinreichend klein ist.

Beweis: Da K eine offene Kugel in $L(G)$ ist, gibt es ein $\varepsilon > 0$, so daß für alle $s, t \in J := (-1-\varepsilon, 1+\varepsilon)$ gilt: $tv, su \in K$.

Ersetzt man in der Darstellung (*) für $x*y$ in A.1 x durch tv und y durch su , so konvergiert die Reihe absolut (aufgrund der Definition von K und wegen A.1.2) und es lassen sich die Skalare s und t wegen der Bilinearität der LIE-Klammer herausziehen; es entsteht:

$$tv*su = \sum_{\mu \in H(v,u)} r(\mu) t^{g_\mu} s^{f_\mu} \bar{\mu}, \quad \text{wobei } g_\mu + f_\mu = \text{grad } \mu, \quad g_\mu, f_\mu \in \mathbb{N}$$

Mit Hilfe der Sätze 5.3.4 und 5.3.5 in (9) S. 105 läßt sich diese Reihe in eine Potenzreihe $\sum_{(n,p) \in \mathbb{N}^2} t^n s^p c_{n,p}$ mit $c_{n,p} \in L(G)$ umformen, die auf $J \times J$ absolut summierbar und daher nach (9) S. 203 Satz 9.3.1 dort auch analytisch ist. Nach der Substitution von s durch $1-t$ erhält man daraus $w(v, u)$ als analytische Abbildung:

$$(1) \quad w(v, u)(t) = \sum_{(n,p) \in \mathbb{N}^2} t^n (1-t)^p c_{n,p}$$

Da nach Definition von K der Ausdruck $x*(v*u)$ für $x, v, u \in K$ wohldefiniert ist, erhält man ganz ähnlich nach entsprechender Ersetzung und Umformung die Analytizität von $w(x, v, u)$:

$$(2) \quad w(x, v, u)(t) = \sum_{(n,p) \in \mathbb{N}^2} t^n (1-t)^p d_{n,p} \quad \text{mit } d_{n,p} \in L(G) \quad . \quad \square$$

Da es im Folgenden weiter verwendet wird, sei hier nochmals an die Definition 1.5 (b) erinnert:

Für $V \in \mathcal{W}_G$ ist $H_V = \{x \in H \mid \pi(V) \subset \text{Fix}(k_x)\}$. Ergänzend sei noch bemerkt: $V_1 \subset V_2 \Rightarrow H_{V_2} \subset H_{V_1}$. $K \subset L(G)$ wurde vor 4.1 definiert

Vereinbarung:

Die in G enthaltenen Bilder von Elementen bzw. Teilmengen von $L(G)$ bezüglich der Abbildung $\exp_G$ sollen mit einer darüber gesetzten "Schlange" bezeichnet werden; z.B. ist dann für $x \in L(G)$: $\tilde{x} = \exp_G(x)$, mit $\tilde{x} \in G$ und für $M \subset L(G)$: $\tilde{M} = \exp_G(M)$ mit $\tilde{M} \subset G$. Damit läßt sich der folgende Beweis kürzer fassen:

4.2 Proposition:

Sind $\tilde{V}, \tilde{U} \in \mathcal{W}_G$ offen und gilt $\tilde{V} \subset \tilde{U} \subset \tilde{K}$, so ist $H_{\tilde{U}}$ offen in $H_{\tilde{V}}$.

Beweis: Es wird gezeigt, daß $H_{\tilde{V}} \cap \tilde{K} \subset H_{\tilde{U}}$ ist. Sei dazu $\tilde{x} \in H_{\tilde{V}} \cap \tilde{K}$, $\tilde{v} \in \tilde{V}$ und $\tilde{u} \in \tilde{U}$. Zunächst werden die Abbildungen f_1 und f_2 , $f_{1,2}: (-\varepsilon, 1+\varepsilon) \longrightarrow L(G)/L(H)$ definiert durch:

$$f_1(t) := q(w(v, u)(t)) \quad \text{und} \quad f_2(t) := q(w(x, v, u)(t)) .$$

$q: L(G) \longrightarrow L(G)/L(H)$ ist die kanonische Abbildung. Nach 4.1 sind f_1 und f_2 wohldefiniert und bestimmen gewisse "Wege" in $L(G)/L(H)$. Da q stetig und linear ist, folgt gemäß (1) und (2) im Beweis von 4.1 :

$$f_1(t) = \sum_{(n,p) \in \mathbb{N}^2} t^n (1-t)^p q(c_{n,p}) , \quad f_2(t) = \sum_{(n,p) \in \mathbb{N}^2} t^n (1-t)^p q(d_{n,p})$$

Nach Definition der Norm auf $L(G)/L(H)$ ist $\|q(x)\|_{L(G)/L(H)} \leq \|x\|_{L(G)}$, daher sind diese Reihen absolut summierbar und f_1, f_2 somit analytische Abbildungen.

$w(v, u)(t)$, $w(x, v, u)(t) \in K * K * K \subset C$ und $q(C) = C'$ (vgl. A.4.(iv))

$$\Rightarrow \bigwedge_{t \in (-\varepsilon, 1+\varepsilon)} f_1(t), f_2(t) \in C' \subset L(G)/L(H)$$

Nach Voraussetzung ist $\tilde{V}$ offen und damit auch V , und da $w(v,u)$ stetig ist und $w(v,u)(1) = v$ (vgl. A.2.1 (i)) , gibt es zu $v \in V$ ein $\delta > 0$ ($\delta \leq \varepsilon$) mit $\bigwedge_{t, |1-t| < \delta} w(v,u)(t) \in V$ (*)

Berücksichtigt man, daß nach A.4. (iv) $\tilde{\exp}(q(c)) = \pi(\exp_G(c))$ für $c \in C$, so gilt:

$$\begin{aligned} \bigwedge_{t, |1-t| < \delta} \tilde{\exp}(f_1(t)) &= \tilde{\exp}(q(w(v,u)(t))) = \pi(\exp_G(w(v,u)(t))) = \\ &= \exp_G(\underbrace{tv*(1-t)u}_{\in \tilde{V} \text{ nach } (*)}) \cdot H \stackrel{\tilde{x} \in H_{\tilde{V}}}{=} \tilde{x} \cdot \exp_G(\underbrace{tv*(1-t)u}_{\in K \text{ nach } (*), \text{ und da } \tilde{V} \subset \tilde{K}}) \cdot H = \\ &= \exp_G(\underbrace{x}_{\in K \text{ nach } V.H.}) \cdot \exp_G(tv*(1-t)u) \cdot H \stackrel{A.3.1.(i)}{=} \exp_G(x*(tv*(1-t)u) \cdot H = \\ &= \pi(\exp_G(w(x,v,u)(t))) = \tilde{\exp}(q(w(x,v,u)(t))) = \tilde{\exp}(f_2(t)) \end{aligned}$$

Also hat man: $\bigwedge_{t, |1-t| < \delta} \tilde{\exp}(f_1(t)) = \tilde{\exp}(f_2(t))$.

Die Bijektivität von $\tilde{\exp}$ liefert dann: $\bigwedge_{t, |1-t| < \delta} f_1(t) = f_2(t)$.

Mit Hilfe von (9) S. 206 Satz 9.4.2 erhält man daraus nach 4.1 :

$\bigwedge_{t \in (\varepsilon, 1+\varepsilon)} f_1(t) = f_2(t)$. Insbesondere bedeutet das für $t = 0$:
 $f_1(0) = q(u) = f_2(0) = q(x*u)$ und da $u, x*u \in C$ und $\tilde{\exp}$ bijektiv ist, folgt weiter:

$$\begin{aligned} \tilde{\exp}(q(u)) &= \pi(\exp_G(u)) = \tilde{u}H = \tilde{\exp}(q(x*u)) = \pi(\exp_G(x*u)) = \\ &= \tilde{x}\tilde{u}H \Rightarrow \tilde{u}H \in \text{Fix}(k_{\tilde{x}}) . \text{ Dieses Ergebnis läßt sich aber für} \\ &\text{alle } \tilde{u} \in \tilde{U} \text{ gleichermaßen erzielen, womit gezeigt ist:} \\ \pi(\tilde{U}) &\subset \text{Fix}(k_{\tilde{x}}) \text{ und somit } \tilde{x} \in H_{\tilde{U}} . \quad \S \end{aligned}$$

Nun läßt sich folgender Satz beweisen:

4.3 Satz:

Sind G und $H \subset G$ LIE-Gruppen, so folgt $(G,H) \in \mathcal{U}_{0a}$.

Beweis: Sei $x \in I_H \mathcal{U}_G$, $\pi(M) \subset \text{Fix}(k_x)$ und $M \in \mathcal{U}_G$; für $z \in G$

sei wieder $x_z = z^{-1}xz$. Es wird nun gezeigt:

Zu $aH \in (\text{Fix}(k_x))^\circ$ gibt es ein offenes $W_a \in \mathcal{U}_G$, so daß

$$aH \in \bigcap_{w \in W_a} \text{Fix}(k_x^{-1}x_w) \quad (1)$$

Dann gilt nämlich: $\bigwedge_{w \in W_a} a^{-1}x^{-1}x_wa = \overbrace{a^{-1}x^{-1}aa^{-1}w^{-1}xwa}^{\in H} \in H$ nach

$$1.2 (a) \Rightarrow \bigwedge_{w \in W_a} a^{-1}w^{-1}xwa \in H \Rightarrow \pi(W_a) \subset \text{Fix}(k_x). \text{ Damit ist}$$

aber $aH \in \text{Fix}(k_x)^\circ$, also ist $\text{Fix}(k_x)^\circ$ offen und abgeschlossen in G/H und enthält H . Da dies für ein beliebiges $x \in I_H \mathcal{U}_G$ gezeigt wird, ist man fertig.

Beweis von (1):

Man wählt zunächst ein $b \in a\tilde{K}$ derart, daß $bH \in \text{Fix}(k_x)^\circ$. Wie man leicht sieht, gibt es ein symmetrisches, offenes $W_a \in \mathcal{U}_G$, so daß folgende Bedingungen erfüllt sind:

$$W_a b W_a \subset a\tilde{K} \text{ und } W_a \subset \tilde{K} \quad (2)$$

$$\bigwedge_{w \in W_a} b^{-1}x^{-1}x_wb \in \tilde{K} \quad (3)$$

$$\pi(W_a b W_a) \subset \text{Fix}(k_x) \quad (4)$$

$$\text{Behauptung: } \pi(W_a) \subset \bigcap_{w \in W_a} \text{Fix}(k_b^{-1}x^{-1}x_wb)$$

Beweis: Seien $w_1, w_2 \in W_a$; dann gilt:

$$w_1^{-1}(b^{-1}x^{-1}x_{w_2}b)w_1 = \underbrace{w_1^{-1}b^{-1}x^{-1}bw_1}_{\in H \text{ nach (4)}} \underbrace{w_1^{-1}b^{-1}w_2^{-1}xw_2bw_1}_{\in H \text{ nach (4)}} \in H$$

Da dies für alle $w_1, w_2 \in W_a$ gilt, ist die Behauptung bewiesen.

Es folgt weiter: $\bigwedge_{w \in W_a} b^{-1}x^{-1}x_wb \in H_{W_a}$ und (3) liefert damit:

$$\bigwedge_{w \in W_a} b^{-1}x^{-1}x_wb \in H_{W_a} \cap \tilde{K}.$$

Wenn man in 4.2 W_a statt $\tilde{V}$ und $\tilde{K}$ statt $\tilde{U}$ setzt (das ist wegen (2) zulässig), so erhält man damit: $H_{\tilde{K}}$ ist offen in H_{W_a} , genauer ist $H_{W_a} \cap \tilde{K} \subset H_{\tilde{K}} \Rightarrow \bigwedge_{w \in W_a} b^{-1}x^{-1}x_wb \in H_{\tilde{K}}$. Das aber bedeutet

nach der Definition von $H_{\tilde{K}}$ und 1.2 (a) :

$$\bigwedge_{\substack{z \in \tilde{K} \\ w \in W_a}} z^{-1} b^{-1} x^{-1} x_w b z \in H \quad (5)$$

Da $b \in a\tilde{K}$ ist, gibt es ein $z_b \in \tilde{K}$ mit $b = az_b$. Setzt man in

$$(5) \quad z = z_b^{-1}, \quad z_b^{-1} \in \tilde{K}, \quad \text{so ergibt sich: } \bigwedge_{w \in W_a} a^{-1} x^{-1} x_w a \in H,$$

also mit 1.2 (a) dann $aH \in \bigcap_{w \in W_a} \text{Fix}(k_x^{-1} x_w)$. 8

§5. Ein weiteres (Gegen) Beispiel

Bei LIE-Gruppen (endlich - als auch unendlichdimensional) und bei lokal kompakten Gruppen ließen sich positive Aussagen machen. Eine der gemeinsamen Eigenschaften dieser Gruppen ist die Vollständigkeit, wenn man die übliche Links-bzw. Rechtsuniformität betrachtet.

Wie das Beispiel 2.1 zeigt, ist die Vollständigkeit von G sicher nicht notwendig für eine positive Lösung. Es sollte nun aber die Frage geklärt werden, ob die Eigenschaft " G vollständig" möglicherweise bereits hinreichend für die Zugehörigkeit von (G, H) zu $\mathcal{U}_{\text{oa}}$ ist.

Diese Frage wird durch das folgende Gegenbeispiel einer vollständigen, metrisierbaren Gruppe G verneint:

Man geht wie in 2.2 aus von der Gruppe G der Homöomorphismen des Intervalls $I := [0, 1]$ auf sich, die 0 und 1 festlassen. Verknüpfung ist die Komposition von Abbildungen (vgl. §2. 2.2) .

$G' := \{f \in G \mid f, f^{-1} \in C^1[0, 1]\}$ ist eine Untergruppe von G .

Auf G' wird nun eine Uniformität $U_{G'}$ definiert:

Für $n \in \mathbb{N}$ sei $V_n := \{(f, g) \in G' \times G' \mid \sup_{x \in I} |f'(x) - g'(x)| < \frac{1}{n}\}$.

Es ist klar, daß $(V_n)_{n \in \mathbb{N}}$ eine Filterbasis auf $G' \times G'$ ist und daß der davon erzeugte Filter der Nachbarschaftsfilter einer Uniformität $U_{G'}$ auf G' ist. Die zugehörige Topologie $\mathcal{T}$ ist eine hausdorffsche Gruppentopologie auf G' und $(U_n)_{n \in \mathbb{N}}$ mit

$U_n := V_n[id_I]$ ist eine e -Umgebungsbasis auf G' ($e = id_I$)

und es gilt: $V_n[id_I] = \{f \in G' \mid (f, id_I) \in V_n\}$ und

$$U_n = \{f \in G' \mid \sup_{x \in I} |f'(x) - 1| < \frac{1}{n}\}$$

Da der Beweis dieser Aussagen, wie bereits bei der Topologie $\mathcal{T}$ auf G (vgl. §2. 2.2), ohne tiefergehende Besonderheiten auf die übliche Weise verläuft, soll darauf hier nicht eingegangen werden.

Von $(G', \mathcal{T}')$ sollen die folgenden Eigenschaften hervorgehoben werden:

Auf analoge Weise, wie dies bei der Topologie $\mathcal{T}$ auf G gezeigt wurde (vgl. 2.2 (1), (2)), ergibt sich, daß G' bogenweise und lokal bogenweise zusammenhängend und natürlich metrisierbar ist.

Ferner ist G' separabel. Denn da $C[0,1] := \{f: [0,1] \rightarrow \mathbb{R} \mid f \text{ ist stetig}\}$ versehen mit der Schlauchtopologie $\mathcal{T}$, separabel und metrisierbar ist, besitzt $\{f' \mid f \in G'\}$ (f' ist die 1. Ableitung von f) eine abzählbare, bezüglich $\mathcal{T}$ dichte Teilmenge A , womit $\{f \in G' \mid f' \in A\}$ eine abzählbare dichte Teilmenge von G' ist.

Und schließlich gilt:

5.1 Satz:

G' ist vollständig.

Zum Beweis muß die Behauptung bezüglich der Linksuniformität $\mathcal{L}_G$, bzw. Rechtsuniformität $\mathcal{R}_G$, nachgewiesen werden. Hier soll $\mathcal{L}_G$, betrachtet und gezeigt werden, daß für eine $\mathcal{L}_G$ -Cauchyfolge (f_n) die Folge (f'_n) eine Cauchyfolge in $C_u[0,1]$ ist (das ist $C[0,1]$, versehen mit der Topologie der gleichmäßigen Konvergenz). Dann ist auch (f_n) eine Cauchyfolge in $C_u[0,1]$ und es konvergiert (f_n) gegen ein $f \in C[0,1]$. Schließlich zeigt man noch, daß $f \in G'$ und $f_n \rightarrow f$ in $\mathcal{T}'$. Bevor der Satz bewiesen werden kann, sind noch zwei Lemmata erforderlich:

5.2 Lemma:

Ist (f_n) $\mathcal{L}_G$ -Cauchyfolge in $U_1 \subset G'$, so ist (f'_n) gleichmäßig gleichgradig stetig.

Beweis: (indirekt)

Annahme : $\bigwedge_{\varepsilon > 0} \bigvee_{k \in \mathbb{N}} \bigwedge_{\substack{n(k) \in \mathbb{N} \\ x_k, y_k \in I}} |x_k - y_k| < \frac{1}{k}, \text{ aber } |f'_{n(k)}(x_k) - f'_{n(k)}(y_k)| \geq \varepsilon$

Da (f_n) $\mathcal{L}_G$ -Cauchyfolge ist, gilt:

$$\bigvee_{n_0 \in \mathbb{N}} \bigwedge_{n, m \geq n_0} \sup_{x \in I} |(f_n^{-1} \circ f_m)'(x) - 1| < \frac{\varepsilon}{4} \quad (1)$$

$$\Rightarrow \bigvee_{\substack{n, m \geq n_0 \\ x \in I}} |f'_m(x) - f'_n(f_n^{-1}(f_m(x)))| < \frac{\varepsilon}{4} \quad (2)$$

(2) erhält man durch Anwendung der Ableitungsregel für Umkehrfunktionen unter Verwendung, daß wegen $f_n \in U_1$ sicher gilt:

$$\bigwedge_{n \in \mathbb{N}} \sup_{x \in I} |f'_n(x)| < 2.$$

f'_{n_0} ist stetig, somit ist f'_{n_0} gleichmäßig stetig auf $I \Rightarrow$

$\Rightarrow$ es gibt ein $\delta > 0$ mit:

$$\bigwedge_{\substack{x, y \in I \\ |x - y| < \delta}} |f'_{n_0}(x) - f'_{n_0}(y)| < \frac{\varepsilon}{4} \quad (3)$$

Klarerweise kann man in der Annahme von einem $\varepsilon < 1$ ausgehen,

$$\text{so daß nach (1) gilt: } \bigwedge_{n \geq n_0} f_{n_0}^{-1} \circ f_n \in U_8 \subset U_1 \quad (4)$$

Wendet man den Mittelwertsatz auf die Funktion $f_{n_0}^{-1} \circ f_n$ an,

so erhält man:

$$\bigwedge_{\substack{x, y \in I \\ n \geq n_0}} |f_{n_0}^{-1}(f_n(x)) - f_{n_0}^{-1}(f_n(y))| \leq \sup_{x \in I} |(f_{n_0}^{-1} \circ f_n)'(x)| \cdot |x - y| \stackrel{(4)}{\leq} 2 \cdot |x - y| \quad (5)$$

Die Folgen (x_k) und (y_k) in I (siehe Annahme) enthalten konvergente Teilfolgen (x_{k_1}) und (y_{k_1}) , die beide gegen dasselbe $x_0 \in I$ konvergieren. Nun wählt man $i_0 \in \mathbb{N}$ so groß, daß sowohl

$$\frac{1}{k_{i_0}} < \delta/2 \quad (\delta \text{ aus (3)}) \text{ als auch } n(k_{i_0}) > n_0 \quad (n_0 \text{ aus (1)})$$

und erhält:

$$\begin{aligned}
 & \left| f'_n(k_{i_0})(x_{k_{i_0}}) - f'_n(k_{i_0})(y_{k_{i_0}}) \right| \leq \left| f'_n(k_{i_0})(x_{k_{i_0}}) - f'_{n_0}(f_{n_0}^{-1}(f_n(k_{i_0})(x_{k_{i_0}}))) \right| + \\
 & + \left| f'_{n_0}(f_{n_0}^{-1}(f_n(k_{i_0})(x_{k_{i_0}}))) - f'_{n_0}(f_{n_0}^{-1}(f_n(k_{i_0})(y_{k_{i_0}}))) \right| + \\
 & + \left| f'_{n_0}(f_{n_0}^{-1}(f_n(k_{i_0})(y_{k_{i_0}}))) - f'_n(k_{i_0})(y_{k_{i_0}}) \right| < \underbrace{\frac{\varepsilon}{4}}_{\text{nach (2)}} + \underbrace{\frac{\varepsilon}{4}}_{\text{nach (3)}} + \underbrace{\frac{\varepsilon}{4}}_{\text{nach (2)}} = \frac{3}{4} \varepsilon
 \end{aligned}$$

Dies ist aber ein Widerspruch zur Annahme ! §

5.3 Lemma:

Ist (f_n) $\mathcal{L}_G$ -Cauchyfolge in $U_1 \subset G'$, so ist (f'_n) Cauchyfolge in $C_u[0,1]$.

Beweis: Sei $k \in \mathbb{N}$. Für hinreichend große $n, m \in \mathbb{N}$ ist $f_m \in f_n U_k$, also gibt es ein $u_k \in U_k$ mit $f_m = f_n u_k \Rightarrow \bigwedge_{x \in I} |f'_n(x) - f'_m(x)| =$
 $= |f'_n(x) - f'_n(u_k(x)) u'_k(x)| \leq |f'_n(x)| \cdot |1 - u'_k(x)| +$
 $+ |f'_n(x) - f'_n(u_k(x))| \cdot |u'_k(x)|$

Berücksichtigt man, daß $\sup_{x \in I} |u'_k(x)| < 1 + \frac{1}{k}$ und daß

$\bigwedge_{x \in I} |u'_k(x) - 1| < \frac{1}{k}$, so ist für hinreichend große k der 1.

Summand wegen der gleichgradigen Beschränktheit von (f'_n) und der 2. Summand nach 5.2 beliebig klein. §

Nun zum Beweis des Satzes 5.1 :

Für eine $\mathcal{L}_G$ -Cauchyfolge (f_n) in $U_2 \subset U_1$ gilt:

$\bigvee_{\varphi \in C[0,1]} f_n \xrightarrow{\text{glm.}} \varphi$ in $C_u[0,1]$, wegen 5.3 und der Vollständigkeit von $C_u[0,1]$. Ferner ist mit (f'_n) auch (f_n) Cauchyfolge in $C_u[0,1]$, da $\bigwedge_{n \in \mathbb{N}} f_n(0) = 0$. Also konvergiert auch (f_n) gleichmäßig gegen ein $f \in C[0,1]$ und es gilt: $f \in C^1[0,1]$ und $f' = \varphi$.
 Weil $\bigwedge_{n \in \mathbb{N}} f_n \in U_2$, ist $\sup_{x \in I} |f'_n(x) - 1| < \frac{1}{2} \Rightarrow \bigwedge_{x \in I} \frac{1}{2} \leq f'(x) \leq \frac{3}{2}$, also ist f injektiv und da $f(0) = 0$, $f(1) = 1$ und f stetig,

folgt die Surjektivität von f . Aus diesen Eigenschaften von f und f' erhält man schließlich: f ist umkehrbar und $f^{-1} \in C[0,1]$, d.h. $f \in G'$ (genauer: $f \in U_2^-$). Wegen der gleichmäßigen Konvergenz von (f'_n) gegen f' , konvergiert dann nach Definition von U_G , und $\mathcal{T}'$, (f_n) auch gegen f , bezogen auf $\mathcal{T}'$.

Somit ist gezeigt, daß jede $\mathcal{L}_G$ -Cauchyfolge in U_2^- konvergiert, daher ist $U_2^- \mathcal{L}_G$ -vollständig und damit gilt dasselbe auch für G' . 8

Definiert man nun analog zu 2.2 : $H' := \{f \in G' \mid f(\frac{1}{2}) = \frac{1}{2}\}$, so ist $H' = H \cap G'$, H wie in 2.2. Völlig analog läßt sich auch der Beweis führen, daß $(G', H') \notin \mathcal{U}_{Oa}$ gilt.

(vgl. Bemerkung (b) in 2.2).

Nach Definition der Topologie $\mathcal{T}$ auf G (vgl. 2.2) und einer einfachen Anwendung des Mittelwertsatzes auf die Funktion $g(x) := f(x) - x$ erscheint es einleuchtend, daß $\mathcal{T}'$ feiner ist als die Spurtopologie $\mathcal{T} \cap G'$:

$$|f(x) - x| = |f'(\xi)x - 1| \cdot |x| \leq \sup_{x \in I} |f'(x) - 1| \cdot |x|, \text{ wobei } 0 < \delta < 1.$$

Zusammengefaßt bedeutet das:

$(G', \mathcal{T}')$ ist eine bogenweise und lokal bogenweise zusammenhängende, vollständige, metrisierbare und separable Gruppe, für die gilt : $(G', H') \notin \mathcal{U}_{Oa}$.

Jetzt sollen noch vergleichende Betrachtungen über die Uniformitäten $\mathcal{L}_G$, $\mathcal{R}_G$, und U_G durchgeführt werden.

5.4 Satz:

G' ist keine SIN-Gruppe.

Beweis: Es wird gezeigt, daß $\mathcal{L}_G$ und $\mathcal{R}_G$ nicht gleich sind,

d.h. die Identität $\iota: (G', \mathcal{L}_{G'}) \longrightarrow (G', \mathcal{R}_{G'})$ bzw.

$\iota: (G', \mathcal{R}_{G'}) \longrightarrow (G', \mathcal{L}_{G'})$ ist nicht gleichmäßig stetig. Nach (11) S. 28 4.24 genügt es, dazu zwei Folgen (f_n) und (g_n) anzugeben, so daß $g_n \longrightarrow \text{id}_I$ und $f_n \circ g_n \circ f_n^{-1} \not\longrightarrow \text{id}_I$.

Da die Existenz der im Folgenden durch gewisse Eigenschaften charakterisierten Funktionenfolgen in G' unmittelbar klar ist, und eine explizite Definition keine weiterführenden Beiträge liefert, soll darauf verzichtet werden.

Sei (g_n) eine Folge von Funktionen, deren Graphen sich von oben her der Diagonalen annähern ($\bigwedge_{n \in \mathbb{N}} g_n(x) > x$) :

(f_n) wird so gewählt, daß $\bigwedge_{n \in \mathbb{N}} f'_n(\frac{1}{2}) = \frac{1}{2} = f_n(\frac{1}{2})$ und $\bigwedge_{n \in \mathbb{N}} f'_n(g_n(\frac{1}{2})) = 1$.

Der Graph von f_n erfährt also im Bereich zwischen $\frac{1}{2}$ und $g_n(\frac{1}{2})$ eine mit wachsendem n immer "heftiger werdende" Änderung der Steigung von $\frac{1}{2}$ auf 1. Es gilt nun:

$$\begin{aligned} (f_n \circ g_n \circ f_n^{-1})'(x) &= f'_n(g_n(f_n^{-1}(x))) g'_n(f_n^{-1}(x)) (f_n^{-1})'(x) = \\ &= \left[f'_n(g_n(f_n^{-1}(x))) / (f'_n(f_n^{-1}(x))) \right] \cdot g'_n(f_n^{-1}(x)) \Rightarrow \\ &\Rightarrow (f_n \circ g_n \circ f_n^{-1})'(\frac{1}{2}) = 2 \cdot g'_n(\frac{1}{2}) > \frac{3}{2} \quad \text{für hinreichend großes } n. \end{aligned}$$

Das bedeutet nach Definition von $\mathcal{T}'$, daß $(f_n \circ g_n \circ f_n^{-1})$ nicht gegen id_I konvergiert. §

Bemerkung: Es gilt : $U_{G'} \not\subset \mathcal{L}_{G'}$, $U_{G'} \not\subset \mathcal{R}_{G'}$, $\mathcal{L}_{G'} \not\subset U_{G'}$, $\mathcal{R}_{G'} \not\subset U_{G'}$. Damit folgt: $U_{G'}$, $\mathcal{L}_{G'}$ und $\mathcal{R}_{G'}$ sind drei echt verschiedene Uniformitäten auf G' , zu denen dieselbe (Gruppen) Topologie $\mathcal{T}'$ auf G' gehört. Das beruht letztlich darauf, daß $|f'(x) - g'(x)|$ klein sein kann, während $|f'(x)/g'(x) - 1|$ sehr groß ist (für den Fall, daß $f'(x), g'(x) \ll 1$) und auch

umgekehrt (für den Fall, daß $f'(x), g'(x) \gg 1$) .

Da einerseits G' keine SIN-Gruppe und das positive Beispiel der SIN-Gruppe aus 2.1 nicht vollständig ist, wäre es nun interessant, den Fall einer vollständigen, metrisierbaren SIN-Gruppe zu untersuchen. Sollen sich aber dabei Ergebnisse erzielen lassen, die über die bereits vorhandenen hinausgehen, so muß man von vornherein (wie auch bei G') auf Eigenschaften wie "LIESCH" oder "lokal kompakt" verzichten. Dadurch sind solche Gruppen allgemein schwerer faßbar und man betrachtet eher konkrete Beispiele.

Es ließ sich hierbei bis jetzt kein weiteres Resultat finden.

§6. Quotientenräume nach speziellen Untergruppen

In §3. und §4. spielten die Eigenschaften der Gruppe G eine bedeutende Rolle. Insbesondere die Existenz eines Haarschen Maßes bzw. einer LIE-Struktur auf G wurde in besonderem Maße ausgenützt.

Im Folgenden soll das Hauptgewicht auf die Untersuchung der für eine positive Lösung hinreichenden Eigenschaften von H gelegt werden. Die Forderungen, die dabei an G gestellt werden müssen, erweisen sich als relativ schwach.

Die Ausgangssituation ist wie in §4. , d. h. es werden kanonische Homöomorphismen k_x betrachtet, zu denen es ein $M \in \mathcal{U}_G$ gibt mit $\pi(M) \subset \text{Fix}(k_x)$ und es werden hinreichende Bedingungen für die Zugehörigkeit von (G, H) zu Klasse $\mathcal{V}_{\text{oa}}$ gesucht.

Während in §3. und §4. der Identitätssatz für analytische Abbildungen bzw. seine in 3.1.6 formulierte Verallgemeinerung grundlegend war, erlangt in 6.1 eine gewisse Menge von Untergruppen von G zentrale Bedeutung. Als Hauptergebnis ist hier der Satz 6.1.6 zu nennen.

In 6.2 werden dann gewisse Bedingungen an absteigende Folgen von Untergruppen in H gestellt.

Interessant ist, daß sich in den Sätzen 6.1.6 und 6.2.4 positive Resultate einstellen, obwohl keine Forderungen an die Eigenschaften von G gestellt werden.

6.1 Die Menge $\text{OF}(G)$

Für $x \in I_H \mathcal{U}_G$ und $v \in \mathcal{U}_G$ sei
$$D_v(x) := \bigcap_{v \in V} \text{Fix}(k_{x_v}) \quad (x_v = v^{-1} x v) .$$

Analog zu 1.5. (b) definiert man $H_{D_V(x)} := \{z \in H \mid D_V(x) \subset \text{Fix}(k_z)\}$.

Es gilt dann:

- (1) $V^{-1} \cdot D_V(x) \subset \text{Fix}(k_x)$ (nach 1.2 (b)-Bezeichnung: siehe vor 1.1)
- (2) $\{x_v \mid v \in V\} \subset H_{D_V(x)}$ und $H \in D_V(x)$
- (3) $V, W \in \mathcal{U}_G$ und $W \subset V$ $D_V(x) \subset D_W(x)$ und $H_{D_W(x)} \subset H_{D_V(x)}$
- (4) $H_{D_V(x)}$ ist eine Untergruppe von H und sogar von $I_H \mathcal{U}_G$, falls $D_V(x)$ Umgebung von H in G/H ist.
- (5) $D_V(x)$ bzw. $H_{D_V(x)}$ ist abgeschlossen in G/H bzw. in G , falls H in G abgeschlossen ist.

Eine Verbindung zu $\mathcal{U}_{\text{oa}}$ liefert das folgende Lemma:

6.1.1 Lemma:

Gilt für alle $x \in I_H \mathcal{U}_G$: $\bigvee_{U, W \in \mathcal{U}_G} \{x_{wu} \mid w \in W, u \in U\} \subset H_{D_W(x)}$,
so folgt $(G, H) \in \mathcal{U}_{\text{oa}}$.

Beweis: Für ein $x \in I_H \mathcal{U}_G$ sind, ausgehend von der Voraussetzung, der Reihe nach äquivalent:

$$\begin{aligned} \bigvee_{U, W \in \mathcal{U}_G} \bigwedge_{\substack{w \in W \\ u \in U}} D_W(x) \subset \text{Fix}(k_{x_{wu}}) &\stackrel{1.2(a)}{\iff} \bigvee_{U, W \in \mathcal{U}_G} \bigwedge_{w \in W} U \cdot D_W(x) \subset \text{Fix}(k_{x_w}) \iff \\ &\iff \bigvee_{U, W \in \mathcal{U}_G} U \cdot D_W(x) = D_W(x) \end{aligned}$$

Daher enthält $D_W(x)$ eine gleichmäßige Umgebung bezüglich der Rechtsuniformität von G/H von sich selbst, ist also offen und abgeschlossen in G/H .

§

6.1.2 Definition:

Die Menge $\text{OF}(G)$ bestehe aus allen Untergruppen H von G , die folgende Eigenschaft haben: Zu jedem $x \in I_H \mathcal{U}_G$ und $U \in \mathcal{U}_G$ gibt es $V, W \in \mathcal{U}_G$ mit $W^2 \subset V \subset U$, so daß $H_{D_W(x)}$ offen in $H_{D_V(x)}$ ist.

Bemerkungen: Offenbar gehört G zu $OF(G)$.

Eine ähnliche Eigenschaft spielte bereits in §4. eine Rolle (vgl. Prop. 4.2 und Satz 4.3). Dabei genügte allerdings nicht die Existenz (in 4.2 : von e -Umgebungen $\tilde{V}$ und $\tilde{U}$ mit ...), sondern man benötigte die Offenheit (in 4.3 : von $H_{\tilde{U}}$ in $H_{\tilde{V}}$) für alle hinreichend kleinen e -Umgebungen.

Im Folgenden werden Eigenschaften von G , besonders aber von H angegeben, so daß zusammen mit " $H \in OF(G)$ " $(G,H) \in \mathcal{V}_{Oa}$ folgt.

Dazu eine weitere Definition:

6.1.3 Definition:

Sei G eine topologische Gruppe. Eine Menge $A \subset G$ heiße K-Menge : $\Leftrightarrow$ zu jedem $U \in \mathcal{V}_G$ gibt es ein $V \in \mathcal{V}_G$ mit: $\bigwedge_{a \in A} a^{-1}Va \subset U$

Bemerkung: Jede kompakte Menge, insbesondere alle endlichen Mengen sind K-Mengen. In einer SIN-Gruppe ist jede Menge eine K-Menge. Teilmengen und Produkte von K-Mengen sind wieder K-Mengen. Da das Inverse einer K-Menge i.A. keine K-Menge sein wird, könnte man genauer Links-bzw. Rechts-K-Mengen definieren.

6.1.4 Satz:

Ist $H \in OF(G)$, so gilt:

- (a) G lokal zusammenhängend $\Rightarrow (G,H) \in \mathcal{V}_{Oa}$
- (b) $\bigwedge_{x \in I_H} \bigvee_{A \in \mathcal{V}_G} \{x_a | a \in A\}$ ist K-Menge $\Rightarrow (G,H) \in \mathcal{V}_{Oa}$

Beweis: Sei $x \in I_H \mathcal{V}_G$:

(a) Aus der Voraussetzung folgt: gemäß 6.1.2 gibt es $V, W \in \mathcal{V}_G$ mit $W^2 \subset V \subset G$, so daß $H_{DW}(x)$ offen in $H_{DV}(x)$ ist. Die Zusammenhangskomponente C_V von $H_{DV}(x)$ ist dann in $H_{DW}(x)$ ent-

halten. Definiert man für $g \in G$ die Abbildung $f_g: G \rightarrow G$ durch $f_g(z) := x_g^{-1} z^{-1} x_g z$, so ist f_g stetig (vgl. auch Beweis von 1.18 (b) S. 19). Wählt man nun ein zusammenhängendes $U \in \mathcal{U}_G$ mit $U \subset W$, so ist für jedes $w \in W$ die Menge $f_w(U) = \{x_w^{-1} x_{wu} | u \in U\}$ zusammenhängend und es gilt: $e = f_w(e) \in f_w(U)$. Da nach (2) S. 62 x_w^{-1} und x_{wu} in $H_{DV}(x)$ liegen, folgt $f_w(U) \subset C_V \subset H_{DW}(x)$. Da für alle $w \in W$ x_w^{-1} und $f_w(U)$ in $H_{DW}(x)$ enthalten sind, erhält man $\{x_{wu} | w \in W, u \in U\} \subset H_{DW}(x)$. 6.1.1 vollendet den Beweis.

(b) Nach Voraussetzung gibt es ein $A \in \mathcal{U}_G$, so daß $\{x_a | a \in A\}$ eine K-Menge ist. Nach 6.1.2 gibt es $W, V \in \mathcal{U}_G$ mit $W^2 \subset V \subset A$, so daß $H_{DW}(x)$ offen in $H_{DV}(x)$ ist. D.h. es gibt ein $U_1 \in \mathcal{U}_G$ mit $U_1 \cap H_{DV}(x) \subset H_{DW}(x)$. Man wählt nun ein $U_2 \in \mathcal{U}_G$ mit $U_2^2 \subset U_1$. Da $W \subset A$, ist auch $\{x_w | w \in W\}$ eine K-Menge; deshalb gibt es ein $U \in \mathcal{U}_G$ mit: $U \subset W \cap U_2$ und $\bigwedge_{w \in W} x_w^{-1} U x_w \subset U_2$.

Zusammengefaßt liefert das:

$$\bigwedge_{\substack{w \in W \\ u \in U}} x_w^{-1} x_{wu} \in H_{DV}(x) \quad (\text{nach 6.1 (2) S. 62})$$

$$\bigwedge_{\substack{w \in W \\ u \in U}} x_w^{-1} x_{wu} = \underbrace{x_w^{-1} u^{-1} x_{wu}}_{\in U_2} \in U_2^2 \subset U_1$$

Also hat man: $\bigwedge_{\substack{w \in W \\ u \in U}} x_w^{-1} x_{wu} \in H_{DW}(x)$ und weil $x_w^{-1} \in H_{DW}(x)$, folgt dann auch: $\{x_{wu} | w \in W, u \in U\} \subset H_{DW}(x)$ und mit 6.1.1 ist man fertig.

§

6.1.4 (b) ist relativ allgemein formuliert; es lassen sich daraus einige speziellere interessante Aussagen gewinnen:

6.1.5 Satz:

Ist $H \in \text{OF}(G)$, so folgt $(G, H) \in \mathcal{U}_{\text{oa}}$, falls eine der folgenden Bedingungen erfüllt ist:

(a) G ist eine SIN-Gruppe

(b) $\bigwedge_{x \in I_H \mathcal{U}_G} \bigvee_{U \in \mathcal{U}_G} [x]_{\sim} \cap (U_x x \cap H)$ ist relativ kompakt ($[x]_{\sim} = \{g^{-1}xg \mid g \in G\}$)

(c) H ist lokal kompakt

Beweis: Unter Verwendung von 6.1.4 (b) ist nur noch zu zeigen:

Zu $x \in I_H \mathcal{U}_G$ gibt es ein $U \in \mathcal{U}_G$ mit $\{x_u \mid u \in U\}$ ist K -Menge.

(a) Dies ist mit $U = G$ erfüllt!

(b) Man wählt $U, V \in \mathcal{U}_G$ mit folgenden Eigenschaften:

$$V^2 \subset U_x, \quad U = U^{-1}, \quad \pi(U) \subset \text{Fix}(k_x) \quad \text{und} \quad xUx^{-1}, \quad U \subset V.$$

Dann gilt: $x_u \in UVx \subset V^2x \subset U_x x$ und $x_u \in H$, da $\pi(U) \subset \text{Fix}(k_x)$

$\Rightarrow \bigwedge_{u \in U} x_u \in [x]_{\sim} \cap (U_x x \cap H)$, also ist $\{x_u \mid u \in U\}$ Teilmenge einer K -Menge und damit selbst K -Menge.

(c) Wenn H lokal kompakt ist, dann ist die Bedingung (b) erfüllt: Man nehme für U_x eine kompakte Menge. $\S$

Um konkretere Aussagen zu erhalten, ist es jetzt interessant, Gruppen H aufzufinden, welche die in 6.1.4 vorausgesetzte Eigenschaft " $H \in \text{OF}(G)$ " besitzen. Ein Beispiel dafür liefert der folgende Satz:

6.1.6 Satz:

Ist $H \subset G$ eine endlichdimensionale LIE-Gruppe, die abgeschlossen in G ist, so folgt $(G, H) \in \mathcal{U}_{\text{Oa}}$.

Beweis: Weil H in diesem Falle lokal kompakt ist, braucht man nach 6.1.5 (c) nur noch zu zeigen: $H \in \text{OF}(G)$.

Sei also $x \in I_H \mathcal{U}_G$ und $U \in \mathcal{U}_G$. Es gibt eine Folge $(V_n)_{n \in \mathbb{N}}$ von e -Umgebungen $V_n \in \mathcal{U}_G$ mit: $V_1 \subset U$ und $\bigwedge_{n \in \mathbb{N}} V_{n+1}^2 \subset V_n$.

Mit $H_n := H_{D_{V_n}(x)}$ erhält man eine absteigende Folge $(H_n)_{n \in \mathbb{N}}$ von Untergruppen von H . Jedes H_n ist abgeschlossen in G ,

da H abgeschlossen ist. Wenn nun H_{n+1} nicht offen in H_n ist, so bedeutet dies:

$\dim H_{n+1} < \dim H_n \leq \dim H < \infty$. Es muß also ein $n_0 \in \mathbb{N}$ geben, so daß H_{n_0+1} offen in H_{n_0} ist. Man setzt nun $W := V_{n_0+1}$ und $V := V_{n_0}$. Da sich dies für jedes $x \in I_H \mathcal{W}_G$ und $U \in \mathcal{U}_G$ durchführen läßt, folgt nach 6.1.2: $H \in \text{OF}(G)$. §

An dieser Stelle kann man natürlich fragen, ob hier nicht ein ähnliches Vorgehen wie in §3. möglich ist. Gibt es also einen Weg über die LIE-approximierbaren Gruppen als Zwischenstufe, die Aussage in 6.1.6 von " H ist LIE-Gruppe" auf " H ist lokal kompakt" zu verallgemeinern?

Nun, so ein wünschenswertes Ergebnis ließ sich leider nicht erzielen. Auch konnte kein Gegenbeispiel gefunden werden, so daß diese Frage als offen betrachtet werden muß.

Im Folgenden sollen jedoch einige Möglichkeiten dargestellt werden, wie 6.1.6 in der Voraussetzung " H ist LIE-Gruppe" abgeschwächt werden kann. Wie man im Beweis von 6.1.6 sieht, ist die Endlichkeit der Dimension von H von ausschlaggebender Bedeutung. Will man dies abschwächen, so ist es nicht sehr verwunderlich, daß dann zusätzliche Voraussetzungen erforderlich werden.

Zum Beweis des nächsten Satzes benötigt man noch drei Lemmata:

6.1.7 Lemma:

Ist H lokal kompakt, so ist die Menge K_H mit

$$K_H := \{ L \mid L \text{ ist kompakt und } H/L \text{ ist eine LIE-Gruppe} \}$$

bezüglich der Relation " $L_1 \leq L_2 : \Leftrightarrow L_2 \subset L_1$ " nach oben gerichtet.

Beweis: Offenbar ist durch die gegebene Definition eine Halbordnung auf K_H festgelegt. Nach (20) S. 177 Lemma 4.7.1 gilt: H/L_1 und H/L_2 sind LIE-Gruppen $\Rightarrow H/(L_1 \cap L_2)$ ist eine LIE-Gruppe. §

6.1.8 Lemma:

Ist H eine topologische Gruppe, J eine nach oben gerichtete Menge, $A \subset H$ abgeschlossen und $(B_\iota)_{\iota \in J}$ eine Familie kompakter Teilmengen von H mit:

$$\bigcap_{\iota \in J} B_\iota \subset B_{\kappa}, \text{ so folgt: } \bigcup_{\iota \in J} AB_\iota = A \cdot \bigcap_{\iota \in J} B_\iota.$$

Beweis: Es ist klar, daß $A \cdot \bigcap_{\iota \in J} B_\iota \subset \bigcap_{\iota \in J} A \cdot B_\iota$. Sei $x \in \bigcup_{\iota \in J} AB_\iota$; dann gibt es für jedes $\iota \in J$ eine Darstellung $x = a_\iota b_\iota$ mit $a_\iota \in A$ und $b_\iota \in B_\iota$. Seien nun $\kappa_1, \kappa_2 \in J$. Es gibt ein $\kappa_3 \in J$ mit $\kappa_1, \kappa_2 \leq \kappa_3$. Nach Voraussetzung liegt das Netz $(b_\iota)_{\iota \geq \kappa_3}$ in der kompakten Menge B_{κ_1} und hat daher ein Teilnetz $(b_\tau)_{\tau \in J^*}$ mit $J^* \subset J$, das gegen ein $b_0 \in B_{\kappa_1}$ konvergiert (siehe (16) S. 136 Theorem 2). $(b_\tau)_{\tau \in J^*}$ liegt aber auch in B_{κ_2} , also folgt $b_0 \in B_{\kappa_2}$. Da dies für alle $\kappa_2 \in J$ gilt, erhält man: $b_0 \in \bigcap_{\iota \in J} B_\iota$. Das Netz $(a_\tau)_{\tau \in J^*}$ mit $a_\tau = x b_\tau^{-1}$ liegt in A und konvergiert gegen $x b_0^{-1}$. Da A abgeschlossen in H ist, folgt $x b_0^{-1} \in A$, also $x \in A \cdot \bigcap_{\iota \in J} B_\iota$. §

Vor dem nächsten Lemma zwei Abkürzungen:

Eine topologische Gruppe G heiße NSS-Gruppe bzw. NSCS-Gruppe, wenn G keine kleinen bzw. keine kleinen zusammenhängenden Untergruppen enthält.

D.h. es gibt dann ein $U \in \mathcal{U}_G$ mit: U enthält keine Untergruppe bzw. keine zusammenhängende Untergruppe, die von $\{e\}$ verschieden

ist. "NSS" bzw. "NSCS" steht dabei für "no small subgroups" bzw. "no small connected subgroups".

6.1.9 Lemma:

Ist G eine lokal kompakte NSCS-Gruppe und ist G/C_G kompakt, so gibt es ein $d \in \mathbb{N}$ mit:

$$\begin{array}{c} \text{NCS kompakt} \\ \text{G/N NSS-Gruppe} \end{array} \quad \dim G/N \leq d$$

Beweis: Sei $U \in \mathcal{U}_G$ so, daß $N = \{e\}$ für jedes zusammenhängende $N \subset U$ gilt. G/C_G (C_G ist die Zusammenhangskomponente von G) ist kompakt, also gibt es nach (20) S. 175 Theorem 4.6 einen kompakten Normalteiler $H \subset U$ von G , so daß G/H NSS-Gruppe ist. H ist total unzusammenhängend.

Da G/H eine NSS-Gruppe ist, gibt es ein $U_1 \in \mathcal{U}_G$, so daß jede in U_1 enthaltene Untergruppe von G in H liegt. K sei ein kompakter Normalteiler von G mit $K \subset U_1$, derart daß G/K eine NSS-Gruppe ist. Daher kann man ein $U_2 \in \mathcal{U}_G$ finden, so daß jede in U_2 enthaltene Untergruppe von G in K liegt. Dies gilt insbesondere für die Untergruppen von H . Also ist H/K eine total unzusammenhängende NSS-Gruppe, daher nach (20) S. 163

Corollary 2 diskret und folglich $\dim H/K = 0$. Für jedes K dieser Art gilt: $G/K/H/K \cong G/H \Rightarrow \dim G/K = \dim G/H$ (#)

Für einen beliebigen kompakten Normalteiler N von G , derart daß G/N eine NSS-Gruppe ist, liefert Theorem 5.33 in (11) S. 44:

$$G/N \cong_{\mathbb{Z}} G/(N \cap K) / N/(N \cap K)$$

Weil $(N \cap K) \subset U_1$ und $G/(N \cap K)$ eine NSS-Gruppe ist, folgt mit (#): $\dim G/(N \cap K) = \dim G/H$.

Also hat man: $\dim G/N = \dim G/(N \cap K) - \dim N/(N \cap K) \leq \dim G/H =: d$ 8

Bemerkung: 6.1.9 entspricht dem zweiten Teil von Theorem 4.9 in (20) S. 182 . Nur wird dort G als metrische Gruppe vorausgesetzt. Der Beweis von 6.1.9 zeigt, daß die Voraussetzung "metrisch" für diesen Teil weggelassen werden kann.

Und nun zum Satz:

6.1.10 Satz:

Ist G lokal zusammenhängend, $H \subset G$ eine abgeschlossene Untergruppe und C_H eine lokal kompakte NSCS-Gruppe, so folgt $(G, H) \in \mathcal{V}_{\text{oa}}$.

Beweis: Sei $x \in I_H \mathcal{V}_G$. Es wird gezeigt, daß es $V, W \in \mathcal{V}_G$ mit $W^2 \subset V$ gibt, so daß die Zusammenhangskomponente C_V von $H_{D_V}(x)$ in $H_{D_W}(x)$ enthalten ist. Dann ist man fertig, da der Rest des Beweises bereits in 6.1.4 (a) vollzogen wurde.

Man definiert nun wie im Beweis von 6.1.6 eine Folge $(V_n)_{n \in \mathbb{N}}$, $V_n \in \mathcal{V}_G$ und erhält eine absteigende Folge $(H_n)_{n \in \mathbb{N}}$ von abgeschlossenen Untergruppen von H . Die Folge $(C_n)_{n \in \mathbb{N}}$ mit $C_n := C_{H_n}$ ist absteigend in C_H . Nach 6.1.9 und der Voraussetzung gilt: $\bigvee_{d \in \mathbb{N}} \bigwedge_{L \in K_{C_H}} \dim C_H/L \leq d$.

Man definiert nun für $L \in K_{C_H}$ (K_{C_H} im Sinne von 6.1.7 , $K_{C_H} \neq \emptyset$ nach (20) S. 175 Theorem 4.6):

$$M_L := \{k \in \mathbb{N} \mid C_k L/L \text{ ist offen in } C_{k-1}/L\} \cap \{2, \dots, d+2\}$$

($C_k L/L$ ist LIE-Gruppe als abgeschlossene Untergruppe der LIE-Gruppe $C_H L/L$).

Da $\bigwedge_{k \in \mathbb{N}} \dim C_k L/L \leq \dim C_H L/L \leq d$, ist $\bigwedge_{L \in K_{C_H}} M_L \neq \emptyset$. Genauer gilt sogar: $\bigvee_{n_0 \in \{2, \dots, d+2\}} \bigwedge_{L \in K_{C_H}} \bigwedge_{\substack{L^* \in K_{C_H} \\ L^* \subset L}} n_0 \in M_{L^*} \quad (\Rightarrow n_0 \in \bigwedge_{L \in K_{C_H}} M_{L^*})$

Man zeigt dies indirekt:

Annahme: $\bigwedge_{k \in \{1, \dots, d+2\}} L_k \in K_{C_H} \quad \bigwedge_{L \in K_{C_H}} k \notin M_L$; für $L_0 := \bigcap_{k=2}^{d+2} L_k$ ist dann

$M_{L_0} = \emptyset$ und das ist ein Widerspruch zu $L_0 \in K_{C_H}$! ($L_0 \in K_{C_H}$ wegen 6.1.7). Damit ist gezeigt: $\bigwedge_{L \in K_{C_H}} C_{n_0} L^* / L^*$ ist offen in $C_{n_0-1} L^* / L^*$.

C_H ist kompakt erzeugt, da C_H lokal kompakt und zusammenhängend ist. Daher ist C_H und auch jedes $C_n \subset C_H$ σ -kompakt. Nach (11) S. 44 Theorem 5.33 gilt dann:

$C_{n_0-1} L^* / L^* \cong_{\mathcal{L}} C_{n_0-1} / (C_{n_0-1} \cap L^*)$. Bezeichnet man den topologischen Isomorphismus mit f und die kanonische Abbildung von C_{n_0-1} auf $C_{n_0-1} / (C_{n_0-1} \cap L^*)$ mit ψ_{n_0-1} , so ist $\psi_{n_0-1}^{-1}(f(C_{n_0} L^* / L^*)) = C_{n_0} (C_{n_0-1} \cap L^*)$ offen in C_{n_0-1} und somit $C_{n_0-1} = C_{n_0} (C_{n_0-1} \cap L^*)$.

Da dies für alle L^* richtig ist, liefert das:

$$C_{n_0-1} = \bigcup_{L^*} C_{n_0} (C_{n_0-1} \cap L^*) \quad (\#)$$

Die Menge $J := \{L^* \mid L \in K_{C_H}\}$ ist eine Teilmenge der nach oben gerichteten Menge K_{C_H} (vgl. 6.1.7) und wegen $(L_1^* \cap L_2^*)^* \subset L_1^* \cap L_2^* \subset L_1^*, L_2^*$ auch nach oben gerichtet. Setzt man nun $A := C_{n_0}$ und $B_{L^*} := C_{n_0-1} \cap L^*$ und zeigt man, daß $(B_{L^*})_{L^* \in J}$ die in 6.1.8 geforderte Bedingung erfüllt, so liefert 6.1.8:

$$\begin{aligned} \bigcup_{L^* \in J} C_{n_0} (C_{n_0-1} \cap L^*) &= C_{n_0} \cdot \bigcup_{L^* \in J} (C_{n_0-1} \cap L^*) \subset C_{n_0} \cdot \bigcup_{U \in \mathcal{U}_{C_H}} (C_{n_0-1} \cap U) = \\ &= C_{n_0} (C_{n_0-1} \cap \bigcup_{U \in \mathcal{U}_{C_H}} U) = C_{n_0} . \end{aligned}$$

Die " $\subset$ "-Relation besteht deswegen, weil nach (20) S. 175 Theorem 4.6 C_H eine L -Gruppe ist und daher in jedem $U \in \mathcal{U}_{C_H}$ ein kompakter Normalteiler $L \subset C_H$ mit $L \in K_{C_H}$ enthalten ist. Die Bedingung " $\bigwedge_{L \in K_{C_H}} (C_{n_0-1} \cap \tilde{L}) \subset (C_{n_0-1} \cap L^*)$ " von 6.1.8 ist aber trivialerweise erfüllt. Zusammen mit (#) folgt daraus die ge-

forderte Beziehung $C_{n_0-1} \subset H_{n_0}$, was gleichbedeutend mit

$C_V \subset H_{D_W(x)}$ ist, wobei $W := V_{n_0}$ und $V := V_{n_0-1}$.

Damit ist der Beweis vollendet.

§

Bemerkungen:

Aus der Lokalkompaktheit von C_H folgt nach (20) S.175 Theorem 4.6,

daß C_H L-Gruppe ist. Wählt man daher $U_1 \in \mathcal{U}_{C_H}$, so gibt es

einen (kompakten) Normalteiler $L_1 \subset U_1$ von C_H , so daß C_H/L_1 eine

LIE-Gruppe ist. Weil eine LIE-Gruppe eine NSS-Gruppe ist, gibt

es ein $U_2 \in \mathcal{U}_{C_H}$, so daß gilt: Jede Untergruppe von C_H in U_2 ist

Untergruppe von L_1 . Ist $L_1 \neq \{e\}$, so gibt es in U_2 wieder einen

Normalteiler $L_2 \subsetneq L_1$ von C_H , so daß C_H/L_2 eine LIE-Gruppe ist.

Daher gibt es ein $U_3 \in \mathcal{U}_{C_H}$, usw. Auf diese Weise erhält man

eine Normalreihe $L_1 \supsetneq L_2 \supsetneq \dots$. Wird diese Reihe stationär, so

gibt es ein $n_0 \in \mathbb{N}$ mit: $\bigwedge_{k \geq 0} L_{n_0+k} = \{e\}$. Dann ist aber

$C_H \cong C_H/L_{n_0}$ eine LIE-Gruppe und daher erst recht eine NSS-Gruppe.

Die Normalreihe $L_1 \supsetneq L_2 \supsetneq \dots$ besteht aus kompakten Normal-

teilern von C_H , wenn man U_1 kompakt wählt. Bezeichnet man die

Zusammenhangskomponente von L_i mit C_i , so ist C_i auch Normal-

teiler von C_H . Gibt es in der Reihe $C_1 \supsetneq C_2 \supsetneq \dots$ ein $n_0 \in \mathbb{N}$,

so daß $C_{n_0} = \{e\}$, so ist C_H eine NSCS-Gruppe.

6.2 Stationäre Untergruppenreihen

In 6.1.6 und 6.1.10 waren gewisse Eigenschaften, die Untergruppenreihen von H besitzen, von Bedeutung.

Bei 6.1.6 war dies etwa die Existenz einer Stelle $n_0 \in \mathbb{N}$, für

die in der Reihe $H_1 \supset H_2 \supset \dots \supset H_{n_0-1} \supset H_{n_0} \supset \dots$ die Gruppe

H_{n_0} offen in H_{n_0-1} ist.

Bei 6.1.10 wurde gezeigt, daß die Reihe $C_1 \supset C_2 \supset \dots$ an einer gewissen Stelle eine Wiederholung aufweist, d.h. es gilt:

$C_{n_0-1} = C_{n_0}$. Diese Eigenschaften sind Folgerungen aus der vorausgesetzten Struktur von H bzw. C_H . Nun soll umgekehrt, wie in den Bemerkungen nach 6.1.10 schon angesprochen, solch eine Eigenschaft als Voraussetzung verwendet werden, d.h. bestimmte Normalreihen von H bzw. C_H sollen der folgenden Bedingung genügen:

6.2.1 Definition:

Eine topologische Gruppe H erfüllt die Bedingung ($\mathfrak{S}$), in Zeichen $H \in \mathfrak{S}$, wenn jede Normalreihe $H \supset H_1 \supset H_2 \supset \dots$ von abgeschlossenen Normalteilern H_i von H stationär wird, d.h. wenn es ein $n_0 \in \mathbb{N}$ gibt mit: $\bigwedge_{k \geq 0} H_{n_0} = H_{n_0+k}$.

Bemerkung: Es gilt $H \in \mathfrak{S}$, falls H eine Kompositionsreihe besitzt. Da eine solche Reihe nur eine bestimmte endliche Länge hat, ist dies eine unmittelbare Folgerung aus dem Satz von Schreier.

Die Voraussetzung der Lokalkompaktheit von H bzw. C_H , die in 6.1 eine wichtige Rolle spielte, soll nun unter Verwendung von " $H \in \mathfrak{S}$ " durch eine schwächere ersetzt werden. Vorher noch eine Definition:

6.2.2 Definition:

Eine topologische Gruppe G heiße Q-Gruppe, wenn für jede Faktorgruppe G/N nach einem abgeschlossenen Normalteiler N und für jede abgeschlossene Untergruppe $H/N \subset G/N$ gilt:

Ist $G/N/H/N$ zusammenhängend und operiert G/N effektiv auf $G/N/H/N$, so folgt $(G/N, H/N) \in \mathcal{V}_{\text{eff}}$.

Da aus $(G, H) \in \mathcal{M}_{\text{oa}}^+$ für eine lokal kompakte Gruppe folgt:
 $(G, H) \in \mathcal{U}_{\text{oa}}$ und $(G, H) \in \mathcal{U}_{\text{eff}}$, falls G/H zusammenhängend,
 ist insbesondere nach 3.3.2 jede lokal kompakte Gruppe eine
 Q -Gruppe, da jede hausdorffsche Faktorgruppe wieder lokal kom-
 pakt ist.

Damit läßt sich folgender Satz formulieren:

6.2.3 Satz:

Ist $H \subset G$ eine zusammenhängende Q -Gruppe mit $H \in \mathcal{G}$, so
 folgt $(G, H) \in \mathcal{U}_{\text{oa}}$.

Beweis: Sei $x \in I_H \mathcal{U}_G$ und $(V_n)_{n \in \mathbb{N}}$ eine Folge von e -Umgebungen
 mit $V_1 \subset \text{Fix}(k_x)$ und $V_{n+1}^2 \subset V_n$ für alle $n \in \mathbb{N}$. Man erhält
 wie im Beweis von 6.1.6 und 6.1.10 eine absteigende Folge $(H_n)_{n \in \mathbb{N}}$
 von Untergruppen von H . H_n ist abgeschlossen in H , falls H in
 G abgeschlossen ist.

Es ist $(H_n^*)_{n \in \mathbb{N}}$ mit $H_n^* := \langle \{v^{-1}xv \mid v \in V_n\} \rangle^-$ (der Abschluß
 wird in H vorgenommen) eine absteigende Folge von abgeschlossenen
 Untergruppen von H mit $H_n^* \subset H_n^-$, wegen 6.1 (2) ($H_n = H_{DV_n}(x)$).
 H operiert für alle $n \in \mathbb{N}$ kanonisch auf H/H_n^* und es gilt für die
 erzeugenden Elemente $v^{-1}xv$ mit $v \in V_{n+1}$ von H_{n+1}^* und für alle n :

$$\bigwedge_{v, w \in V_{n+1}} x_{vw} = w^{-1}v^{-1}xvw \in H_n^*, \text{ da } V_{n+1}^2 \subset V_n \quad (1)$$

$$\text{Das bedeutet aber: } \{wH_n^* \mid w \in V_{n+1} \cap H\} \subset \text{Fix}(\tilde{k}_{x_v}), \quad (2)$$

wobei $\tilde{k}_{x_v}: H/H_n^* \rightarrow H/H_n^*$ der übliche kanonische Homöomorphismus
 ist. Ist nun M_n^* der größte in H_n^* enthaltene Normalteiler von
 H , so ist M_n^* abgeschlossen in H und es operiert H/M_n^* effektiv
 auf $H/M_n^*/H_n^*/M_n^*$. $H/M_n^*/H_n^*/M_n^*$ ist zusammenhängend, weil H es

ist. Definiert man $\pi_n^*: H \rightarrow H/M_n^*$ kanonisch, so ist $\pi_n^*(x_v) = x_v M_n^*$ und nach (2) gilt: $\{(w M_n^*) H_n^* / M_n^* \mid w \in V_{n+1} \cap H\} \subset \text{Fix}(k_{\pi_n^*(x_v)})$.

$\Rightarrow \pi_n^*(x_v) \in I_{H^*/M_n^*} \mathcal{U}_{H/M_n^*}$, also $\pi_n^*(x_v) = x_v M_n^* = M_n^*$, da H Q -Gruppe und daher $I_{H^*/M_n^*} \mathcal{U}_{H/M_n^*} = \{M_n^*\}$. Da dies für alle $v \in V_{n+1}$ gilt, hat man erhalten: $\{x_v \mid v \in V_{n+1}\} \subset M_n^*$, also auch $H_{n+1}^* \subset M_n^*$ (3)

Man erhält so eine absteigende Folge (M_n^*) von abgeschlossenen Normalteilern von H , die nach Voraussetzung " $H \in \mathcal{F}$ " ab einer Stelle n_0 stationär wird: $\bigwedge_{k \geq 0} M_{n_0+k}^* = M_{n_0}^*$.

Mit (3) ergibt sich die Folge $\dots \supset M_{n_0}^* \supset H_{n_0+1}^* \supset \dots \supset M_{n_0+k}^* \supset H_{n_0+k}^* \supset M_{n_0+k}^* \supset \dots$

woraus man entnehmen kann: $\bigwedge_{k \geq 1} H_{n_0+1}^* = H_{n_0+k}^*$. Gemäß (1) heißt das

für $k = 2$: $\{x_{vw} \mid v, w \in V_{n_0+2}\} \subset H_{n_0+1}^* = H_{n_0+2}^* \subset H_{n_0+2}$. Setzt

man noch $W = U = V_{n_0+2}$, so ist $H_{n_0+2} = H_{DW}(x)$ und 6.1.1 vollendet den Beweis.

§

Die Voraussetzungen des Satzes lassen sich auf folgende Weise variieren:

6.2.4 Korollar:

Ist G lokal zusammenhängend, $C_H \in \mathcal{F}$ und ist C_H eine Q -Gruppe, so folgt $(G, H) \in \mathcal{U}_{Oa}$.

Beweis: 6.2.3 liefert sofort: $(G, C_H) \in \mathcal{U}_{Oa}$ (1)

Ist $x \in I_H \mathcal{U}_G$, $w \in \mathcal{U}_G$ zusammenhängend und $\pi(W^2) \subset \text{Fix}(k_x)$, so gilt: $N := \{v^{-1} x^{-1} x_w v \mid v, w \in W\} \subset H$ nach 1.2 (a) und da N das Bild $f(W \times W)$ bezüglich der stetigen Abbildung

$f: W \times W \rightarrow H$, $(v, w) \mapsto v^{-1} x^{-1} x_w v$ ist, folgt $N \subset C_H$. Mit

1.2 (a) bedeutet das: $\{x^{-1} x_w \mid w \in W\} \subset I_{C_H} \mathcal{U}_G$ (2)

Aus (1) erhält man zusammen mit der Definition von $\mathcal{V}_{Oa}$ (in 1.7):

$$\bigwedge_{\substack{z \in C_G \\ \gamma \in I_{C_H} \mathcal{V}_G}} z^{-1} y z \in C_H \subset H \quad \text{und das liefert mit (2) und 1.2 (a):}$$

$$\bigwedge_{w \in W} \pi(C_G) \subset \text{Fix}(k_x^{-1} x_w) \quad (3)$$

Die Menge $M := \text{Fix}(k_x)^\circ \cap \pi(C_G)$ ist offen und enthält H.

Ist $aH \in M^-$, so gibt es ein $u \in W \cap W^{-1}$ mit : $uaH \in M$. Da

$a^{-1} u^{-1} x^{-1} ua \in H$ und wegen (3) $\bigwedge_{w \in W} a^{-1} u^{-1} x^{-1} x_w ua \in H$, ergibt sich: $\bigwedge_{w \in W} a^{-1} u^{-1} x_w ua \in H$ und somit $(Wu).aH \subset \text{Fix}(k_x)$ nach 1.2 (a).

Nach Wahl von u ist $Wu \in \mathcal{V}_G$, daher $aH \in \text{Fix}(k_x)^\circ$. $\pi(C_G)$ ist abgeschlossen in G/H , da $\pi(C_G) = \pi(C_G \cdot H)$ und $C_G \cdot H$ abgeschlossen in G und gesättigt mod H ist. Also ist $aH \in M$.

$M \subset \text{Fix}(k_x)$ ist somit offen und abgeschlossen in G/H und enthält H . Da die für alle $x \in I_H \mathcal{V}_G$ gilt, ist man fertig. $\S$

§7. Anhang

Die folgenden Sätze und Definitionen sind einer Arbeit von K.H. Hofmann entnommen, die nur in Form eines Scripts im Rahmen des "Seminaire Dubreil 1973/74" angefertigt wurde (siehe (13)). Da, soweit bisher bekannt, dieses Script nicht weiter veröffentlicht wurde, sollen im Folgenden die wichtigsten, in der vorliegenden Arbeit im §4. verwendeten Sätze, Definitionen und Zusammenhänge (ohne Beweise) dargestellt werden.

1. Die Campbell-Hausdorff-Formel

Sei K stets der Körper der reellen oder komplexen Zahlen.

Es sei A eine Banachalgebra mit Einselement 1 und $A_1 := \{x \in A \mid \|x\| < 1\}$.

Für Mengen $B \subset A_1$ sind die Abbildungen

$$\exp: B \rightarrow 1+A_1, \quad \exp x := 1 + x + \frac{1}{2!}x^2 + \frac{1}{3!}x^3 + \dots \quad \text{und}$$

$$\log: 1+B \rightarrow A_1, \quad \log(1+x) := x - \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{3}x^3 - \dots$$

wohldefiniert.

Sofern definiert, läßt sich dann die Verknüpfung $x*y$ bilden,

mit $x*y := \log(\exp(x) \cdot \exp(y))$. Durch Einsetzen und Ausmultiplizieren der Potenzreihen läßt sich das formal auf folgende

Weise ausdrücken:

$$x*y = \sum_{n \in \mathbb{N}} c(p_1, q_1, \dots, p_n, q_n) x^{p_1} y^{q_1} \dots x^{p_n} y^{q_n}$$

für $n \in \mathbb{N}$ und $p_1 + q_1 \geq 1, \dots, p_n + q_n \geq 1$, wobei

$$c(p_1, q_1, \dots, p_n, q_n) = \frac{-(-1)^n}{n(p_1!)(q_1!) \dots (p_n!)(q_n!)}$$

(vgl. (13) S. 1-07 Lemme I.12)

Dabei ist natürlich noch nichts über die Konvergenz dieser Reihe

bekannt. Das Konvergenzverhalten dieser Reihe soll nun untersucht werden. Als erstes betrachtet man dazu gewisse LIE-Algebren:

Unter einer LIE-Algebra soll eine (i.A. unendlichdimensionale) Algebra verstanden werden, deren Multiplikation ein LIE-Produkt ist (bilinear, schiefsymmetrisch, Jacobi-Identität).

Definiert man auf einer Banach-Algebra A ein LIE-Produkt durch $[x, y] := xy - yx$ für $x, y \in A$, so bildet A zusammen mit diesem LIE-Produkt eine LIE-Algebra, die mit $\mathcal{L}A$ bezeichnet wird.

Für spezielle Banachalgebren A läßt sich zeigen, daß für $x, y \in A$, $x*y$ wohldefiniert ist und in $\mathcal{L}A$ folgende Darstellung besitzt:

$$x*y = \sum_{\mu \in M(x,y)} r(\mu) \bar{\mu} = x + y + \frac{1}{2} [x, y] + \sum_{\mu \in M(x,y)} r(\mu) \overline{\mu xy} \quad (*)$$

(vgl. (13) S. 1-09 Théorème I.14)

Dabei ist $r(\mu) \in \mathbb{Q}$, $M(x, y)$ ist das von x und y erzeugte freie Monoid und $\bar{\mu} = \overline{x_1 x_2 \cdots x_n} = [x_1, [x_2, \dots, [x_{n-1}, x_n] \cdots]]$ für $x_i \in \{x, y\}$ für alle $i = 1, \dots, n$.

Nun eine Definition (vgl. im Folgenden (13) S. 2-01 - 2-05):

1.1 Definition:

Eine vollständige topologische LIE-Algebra L, deren Topologie durch eine Norm $\|\cdot\|: L \rightarrow \mathbb{R}_0^+$ bestimmt ist, heißt Dynkin-Algebra, wenn gilt: $\|[x, y]\| \leq \|x\| \|y\|$ für alle $x, y \in L$.

Insbesondere ist jede Dynkin-Algebra ein Banachraum. Wenn A eine B-Algebra ist, so erhält man aus $\mathcal{L}A$ eine Dynkin-Algebra:

Zunächst hat man: $|[x, y]| = |xy - yx| \leq 2|x||y|$, wenn $|\cdot|$ die Norm von A ist. Die Definition $\|x\| := 2|x|$ leistet dann das Gewünschte.

Der folgende Satz enthält eine erstaunliche Aussage:

1.2 Satz:

Für jede Dynkin-Algebra L und für $x, y \in L$ gilt:

Ist $\|x\|, \|y\| < \frac{1}{2} \log 2$, so konvergiert die Reihe in (*) absolut.

Genauer:

1.3 Satz:

(a) Ist $\|x\|, \|y\| \leq r < \frac{1}{2} \log 2$, so folgt: $\|x * y\| \leq -\log(2 - e^r)$.

(b) Definiert man $c \in \mathbb{R}$ durch $-\int_0^c t^{-1} (\log(2 - e^{2t})) dt = \frac{1}{2} \log 2$,

so folgt: $\frac{1}{2} \log(2 - \frac{1}{\sqrt{2}}) < c < \frac{1}{2} \log 2$ und

$\|x * y\| < \frac{1}{2} \log 2$, falls $\|x\|, \|y\| < c$.

2. Assoziierte lokale Gruppen und Untergruppen

(vgl. (13) S. 2-5, 2-6)

Aus den Ergebnissen von 1. erhält man:

2.1 Satz:

Sei B die offene Kugel um $0 \in L$ vom Radius c . Dann sind für

$(x, y, z) \in B^3$ die Produkte $x * (y * z)$ und $(x * y) * z$ wohldefiniert und gleich. Außerdem gilt:

(i) $x * 0 = 0 * x = x$ für alle $x \in L$

(ii) $(-x) * x = x * (-x) = 0$ für alle $x \in L$

(iii) Ist $nx \in B$, für $x \in L$ und $n \in \mathbb{N}$, so ist $x * x * \dots * x$
(n Faktoren) wohldefiniert und stimmt mit nx überein.

(iv) Für $x, a \in B$ folgt: $a * x * (-a) = x + [a, x] + [a, [a, x]] +$
 $+ [a, [a, [a, x]]] + \dots$

2.2 Definition:

Jede konvexe, offene und kreisförmige Menge $B \subset L$, für welche die Abbildung $*$: $B \times B \rightarrow L$ durch (*) definiert und stetig ist,

derart daß die Aussagen in 2.1 gelten, heißt eine zu L assoziierte lokale Gruppe.

2.3 Definition:

Sei B eine zu L assoziierte lokale Gruppe. Eine Teilmenge $G \subset B$ heißt lokale Untergruppe von B , wenn gilt:

$$(i) \quad -G = G$$

$$(ii) \quad (G * G) \cap B \subset G$$

Falls zusätzlich gilt:

$$(iii) \quad G^{-} \cap B = G \quad , \quad \text{so heißt } G \text{ abgeschlossen in B .}$$

3. LIE-Gruppen und Linearisationen

(vgl. (13) 3-7 bis 3-13)

3.1 Definition:

Eine LIE-Gruppe ist eine topologische Gruppe G , zusammen mit einer Dynkin-Algebra L und einer Abbildung $\exp: L \rightarrow G$ mit folgenden Eigenschaften:

- (i) L enthält eine zu L assoziierte lokale Gruppe B (vgl. 2.1 , 2.2) und G enthält eine offene e-Umgebung U , so daß $\exp(B) = U$ und $\exp|_B: B \rightarrow U$ ein Homöomorphismus ist, für den gilt: $\exp(x*y) = \exp(x)\exp(y)$ für $x, y \in B$.

$$(ii) \quad \bigwedge_{\substack{x \in L \\ r, s \in \mathbb{R}}} \exp((r+s)x) = \exp(rx)\exp(sx)$$

3.2 Beispiele:

- (a) Sei E ein Banachraum und A die Banachalgebra aller beschränkten Endomorphismen von E ; dann ist die Gruppe $GL(E)$ aller stetigen invertierbaren Elemente von A eine LIE-Gruppe (als zugeordnete Dynkin-Algebra nimmt man $\mathcal{L}A$;

$\exp: A \rightarrow GL(E)$, $\exp(x) = 1 + x + \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{6}x^3 + \dots$ ist ein lokal invertierbarer, lokaler Homöomorphismus, so daß (i) und (ii) erfüllt sind).

- (b) Jede endlichdimensionale LIE-Gruppe im üblichen Sinn ist eine (lokal kompakte) LIE-Gruppe im Sinne von 3.1 . Zugehörige Dynkin-Algebra ist die LIE-Algebra der Gruppe im üblichen Sinn.

3.3 Definition:

Sei G eine LIE-Gruppe. Mit $L(G)$ wird die zu G gehörige Dynkin-Algebra bezeichnet und $\exp = \exp_G$ heißt die Exponentialabbildung von G . Ein Paar (B, U) , $B \subset L(G)$ und $U \subset G$, von offenen Mengen mit den in 3.1 beschriebenen Eigenschaften heißt eine Linearisation von G . Wenn (B, U) eine Linearisation von G ist, so heißt $(\exp|_U)^{-1}: U \rightarrow B$ der Logarithmus der Linearisation. Bezeichnung: $(\log(B, U) =) \log: U \rightarrow B$.

4. Quotientenräume von LIE-Gruppen nach LIE-Untergruppen

(vgl. (13) 3-13 bis 3-14)

Unter einer LIE-Untergruppe einer topologischen Gruppe G wird eine Untergruppe $H \subset G$ verstanden, so daß H eine LIE-Gruppe gemäß 3.1 ist. Im Gegensatz zum endlichdimensionalen Fall ist im Allgemeinen nicht jede abgeschlossene Untergruppe einer LIE-Gruppe wieder eine LIE-Gruppe (vgl. (13) 3-13 bis 3-14) Es gelten aber folgende Aussagen:

Satz:

Sei eine LIE-Gruppe und H eine LIE-Untergruppe von G ; es gilt:

- (i) H ist abgeschlossen in G .
- (ii) Die Dynkin-Algebra $L(H)$ kann als abgeschlossene Unter-
algebra von $L(G)$ aufgefaßt werden.
- (iii) Es gibt eine Linearisation (B, U) von G , derart daß
 $(B \cap L(H), U \cap H)$ eine Linearisation von H ist.
- (iv) Es gibt eine konvexe, offene und kreisförmige Menge $C \subset B$
mit $C * C \subset B$ und folgender Eigenschaft:

Wenn $q: L(G) \rightarrow L(G)/L(H)$ und $\pi: G \rightarrow G/H$ die kanonischen
Abbildungen sind und definiert wird:

$C' := q(C)$, $W := \exp_G(C)$, $W' := \pi(W)$, so ist das folgende
Diagramm kommutativ:

$$\begin{array}{ccc}
 C & \xrightarrow{q|_C} & C' \\
 \exp_G|_C \downarrow & & \downarrow \widetilde{\exp} \\
 W & \xrightarrow{\pi|_W} & W'
 \end{array}$$

Dabei ist die Abbildung $\widetilde{\exp}: C' \rightarrow W'$, die durch
 $\widetilde{\exp}(q(x)) := \pi(\exp_G(x))$, $x \in C \subset L$ definiert ist,
wohldefiniert und ein Homöomorphismus.

Literaturverzeichnis

(1) BAUER H.:

Wahrscheinlichkeitstheorie und Grundzüge der Maßtheorie,
de Gruyter/Berlin 1968

(2) BOURBAKI N.:

Algèbre I Chap. 1 - 3
Paris/Hermann 1970

(3) BOURBAKI N.:

General Topology, Part 1 and 2 ,
Paris/Hermann 1966

(4) BOURBAKI N.:

Integration Chap. I -IX ,
Paris/Hermann 1969

(5) BREDON G. E.:

Introduction to compact transformation groups,
New York/Academic Press 1972

(6) BRUHAT :

Lectures on LIE-Groups and representations of locally
compact groups,
Tata Institute of Fundamental Research/Bombay 1958

(7) CHEVALLEY C.:

Theory of LIE-Groups,
Princeton/University Press 1946

(8) DIEROLF S. , WARKEN S.:

Some examples in connection with Pontryagins duality theorem,
Sonderabdruck aus Archiv der Mathematik Birkhäuser-Verlag/
Basel und Stuttgart , Vol. 30, 1978 S.599 - 605

(9) DIEUDONNÉ J.:

Grundzüge der modernen Analysis Band I ,
Braunschweig/Vieweg 1971

(10) GAAL ST. A.:

Point set topology,
New York, London/Academic Press 1964

(11) HEWITT E. , ROSS K. A.:

Abstract harmonic analysis I ,
Grundlagen der mathematischen Wissenschaften Band 115/
Springer-Verlag 1963

(12) HEWITT E. , STROMBERG :

Real and abstract analysis,
Berlin/Springer 1969

(13) HOFMANN K. H.:

Théorie Directe des Groupes de LIE,
Paris Secrétariat mathématique 1973/74
(Séminaire DUBREIL (Algèbre) 27e année n° 1 - 4)

(14) HUSAIN :

Introduction to topological groups,
Philadelphia/Saunders 1966

(15) KAPLANSKY I.:

LIE-Algebras and locally compact groups,
Chicago/University Press 1971

(16) KELLEY J. L.:

General Topology,
New York/Van Nostrand Reinhold 1955

(17) LUTZ D.:

Topologische Gruppen,
Mannheim/Bibliographisches Institut 1976

(18) MAYRHOFFER K.:

Inhalt und Maß,
Wien/Springer-Verlag 1952

(19) MEISTER H. J.:

Einführung in die Theorie der topologischen und LIE-Gruppen,
Sektion Physik der Universität München 1972

- (20) MONTGOMERY D. , ZIPPIN L.:

Topological transformation groups
New York/Wiley 4th pr. 1966

- (21) PONTRJAGIN L.:

Topologische Gruppen Teil I ,
Leipzig/Teubner 1957

- (22) REITER H.:

Classical harmonic analysis and locally compact groups
Oxford/Clarendon Press 1968

- (23) ROELCKE W. , KOECHER M.:

Diskontinuierliche und diskrete Gruppen von Isometrien
metrischer Räume,
Math. Zeitschr. 71, 258-267 (1959)

- (24) SAGLE A. A. , WALDE R. E.:

Introduction to LIE-Groups and LIE-algebras,
Academic Press 1973

- (25) SCHUBERT A.:

Topologie,
Stuttgart/Teubner 1969

- (26) TITS :

LIESCHE Gruppen und Algebren,
Vorlesungsausarbeitung Mathematisches Institut/Bonn 1971

- (27) WARNER F. W.:

Foundations of differentiable manifolds and LIE-groups,
London/Scott-Voresman 1971

- (28) WEIL A.:

L'Integration dans les groupes topologiques et ses
applications
Paris/Hermann et Cie 1940

- (29) Yamabe H.:

Collected works of Hidehiko Yamabe,
Ed. by R.B. Boas/
New York Gordon and Breach 1967

Lebenslauf

20. 8. 1946	geboren in Mühldorf/Oberbayern
1952 - 1956	Besuch der Volksschule in Mühldorf
1956 - 1958	Besuch der Oberrealschule in Mühldorf
1958 - 1965	Holbein-Oberrealschule in Augsburg; Abitur
1965 - 1967	Wehrpflichtiger bei der Bundeswehr
1967 - 1974	Studium der Mathematik und der Physik an der Universität München; Diplom in Mathematik 1974
1971 - 1974	Studentische Hilfskraft bzw. Tutor an der Uni- versität München bzw. an der Universität Augsburg
1974 - 1977	Studium der Physik an der Universität München
seit 1976	nebenberufliche Lehrkraft für Mathematik und Physik am Gymnasium bei St. Anna in Augsburg
1978 - 1979	Lehrbeauftragter an der Universität Augsburg
seit 1979	wissenschaftlicher Mitarbeiter an der Uni- versität Augsburg

